This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 4008.97.5

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH INCOME

FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE,

OF BOSTON.

Under a vote of the President and Fellows,
October 24, 1898.

26 April, 1899.

11393

Ueber die Integration von $\Delta u = 0$ und die konforme Abbildung.

Habilitationsschrift

zur Erlangung der Venia legendi

einer hohen philosophischen Fakultät der Universität Marburg

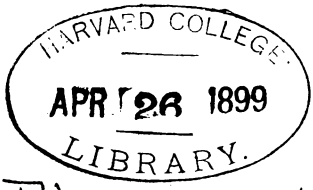
eingereicht von

Dr. Friedrich von Dalwigk.

Marburg 1897.

Druck der kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Lossen, München.

Math 4008.97.5



Pierce fund

Erster Teil.

§ 1. Die Schwarz'sche Arbeit „Zur Theorie der Abbildung" (Züricher Programm 1869, Werke II, 108—32) betrifft ein endliches konvexes Gebiet, welches ein Stück der Zahlenebene einfach bedeckt. Die Randlinie C habe nur vereinzelte Ecken und sonst überall eine bestimmte Tangente, welche sich stetig dreht beim Fortrücken des Berührungspunktes.[1]) Doch sind auch geradlinige Randstücke zulässig. Benutzt wird weiter die Eigenschaft, dass es äquidistante Kurven in geringem Abstand aussen um C gibt; bei den Ecken werden etwa Kreisbogen als Teile dieser Kurven auftreten. Andere Bedingungen braucht C nicht zu erfüllen.[2])

[1]) Ich werde später in diesem Sinne oft kurz von stetiger Biegung der Kurventeile reden.

[2]) Will man die Kurve analytisch geben, etwa durch $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$, und bezeichnet $\Theta = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} \frac{\psi'(\sigma)}{\varphi'(\sigma)}$ den Winkel der Tangente gegen die x-Axe, so soll Θ zwischen den Ecken stetig sein. In den Ecken hat es endliche sprungweise Aenderungen. (Nach Neumann heisse Θ dann abteilungsweise stetig.) Weiter soll Θ niemals abnehmen bei positivem Umlauf um die Kurve. Bei einem vollen Umlauf wächst es um 2π. Eine Linie, welche auf den äusseren Normalen von C das konstante Stück η abschneidet und stetig verläuft, soweit sie den stetig gebogenen Teilen von C entspricht, wird gegeben durch $x_1 = \varphi(\sigma) + \eta \sin\Theta$, $y_1 = \psi(\sigma) - \eta\cos\Theta$ durch Kreisbogen bei den Ecken kann man diese Teile zu einer geschlossenen Linie verbinden. Damit diese Kurve aber sicher überall eine

Herr Schwarz geht aus von einer unendlichen Reihe geradliniger Polygone C_1, C_2 . . C_m . . ., welche die Randkurve C umschliessen und sich ihr als Grenzlage mehr und mehr annähern. C_m verlaufe ganz innerhalb eines Flächenstreifens von der konstanten Breite η_m aussen um C, und dabei mögen η_1, η_2 . . . η_m . . . eine abnehmende Grössenreihe mit konvergenter Summe bilden in Rücksicht auf einen späteren Konvergenzbeweis.[1]) Weiter liege C_m innerhalb oder doch nicht ausserhalb C_{m-1}, es darf Teile damit gemein haben.

Zu jedem Polygon C_m gibt es eine Funktion $s_m(z)$, welche das von C_m umgrenzte Gebiet (1,1)-deutig und konform auf die Fläche eines Einheitskreises $|s| \leq 1$ abbildet. (Die Konformität hört nur für die Ecken auf.)[2])

Tangente hat und damit die Tangente parallel ist zu derjenigen der ursprünglichen Kurve im zugehörigen Punkt (abgesehen von den Ecken von C), dazu muss man Θ' als vorhanden und abteilungsweise stetig annehmen. Weiter ist dann $\Theta' \geq 0$ wegen der Konvexität.

Wenn daher die einzelnen stetig gebogenen Teile von C eiee abteilungsweise stetige Krümmung haben, so genügt das jedenfalls für die ganze Betrachtung.

[1]) Bei Schwarz ist durch besondere Einführung der Polygone $\eta_m = \frac{1}{2} \cdot \eta_{m-1} = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \eta_1 = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \eta$. Diese Einführung hängt damit zusammen, dass Hr. Schwarz in einem ungedruckt gebliebenen ersten Teil der Arbeit die Abbildung derjenigen Gebiete auf eine Kreisfläche eingehend behandelt hatte, welche durch Aneinanderfügen von gleichen Quadraten entstehen. An sich braucht die Gestalt der Polygone keinen weiteren Bedingungen zu unterliegen als den oben im Text genannten, z. B. kann man ganz konvexe Polygone, etwa Tangentenpolygone, benutzen.

[2]) Ich benutze hier z und nicht u als die komplexe Variable, weil ich u später immer als Zeichen für ein Potential verwende. — Auf mehrere Existenzbeweise von $s_m(z)$ für das Gebiet samint dem Rand C_m gehe ich hier nicht näher ein. Ich

Dabei entspreche einem festen Punkt O ($z = o$) im Innern von C der Mittelpunkt $s = o$ des Kreises. Der noch willkürliche Bestandteil in $s_m(z)$ werde dadurch festgelegt, dass $\left(\frac{ds_m(z)}{dz}\right)_{z=o}$ reell und positiv sei.

Unter Benutzung der Konvexität der Randkurve zeigt Hr. Schwarz die Konvergenz des Produktes

$$s = s_1(z) \cdot \frac{s_2(z)}{s_1(z)} \cdot \frac{s_3(z)}{s_2(z)} \cdot \ldots \cdot \frac{s_m(z)}{s_{m-1}(z)} \cdot \ldots$$

und seinen Charakter als analytische Funktion. Das gelingt zwar nicht für das ganze von C begrenzte Gebiet, wie es erwünscht wäre, aber doch für das Innere einer Kreisfläche, deren Rand gerade C von innen berührt (Bd. II S. 125 unten).

Um zu einem vollen Beweis zu kommen, geht er dann über zu den inversen Funktionen $z_1(s)$, $z_2(s) \ldots z_m(s) \ldots$, welche in der ganzen Kreisfläche $|s| \leq 1$ definiert sind, und deren Reihenentwicklungen nach Potenzen von s sogar auf dem Rande noch gelten, nach dem Dirichlet'schen Satz über Fouriér'sche Reihen. Es zeigt sich, dass $z_1(s)$, $z_2(s)$ ... eine Grenzfunktion

$$z(s) = z_1(s) + (z_2(s) - z_1(s)) + (z_3(s) - z_2(s)) + \ldots$$

haben, welche durch eine konvergente Potenzreihe für $|s| < 1$ (nicht ≤ 1) dargestellt wird. Weiter entspricht dem Kreis $|s| = \sigma < 1$ durch Abbildung mittels z(s) eine geschlossene Kurve innerhalb C, welche sich bei Annäherung des σ an 1 überall unbegrenzt an C annähert. Die Funktion vermittelt eine eindeutige und konforme Beziehung des Innern von C und des Kreisinnern aufeinander.

---

will nur hervorheben, dass die Bedenken von Hrn. Jules Riemann gegen die Schläfli'sche Untersuchung (Crelle's Jour. 78) sich auf ein geradliniges Polygon mit einspringenden Ecken beziehen, also die in der letzten Anm. erwähnten ganz konvexen Polygone nicht betreffen würden. — S. auch § 8 im 2. Teil. 1*

Ob aber noch ein eindeutiges und stetiges Entsprechen der Ränder besteht, geht aus der Abhandlung, soweit sie veröffentlicht ist, nicht hervor. Vom allgemeinen Beweis des Hrn. Schwarz ist mir Näheres nicht bekannt. Sobald aber die Randlinie eine analytische Kurve ist oder sich aus einer endlichen Anzahl von regulären Stücken analytischer Linien zusammensetzt, lässt sich alles — auch hinsichtlich der Ecken — ziemlich leicht erledigen. Und für nicht analytische Randlinie steht wenigstens das Vorhandensein der Green'schen Funktion (Rlgs(z)) fest.[1])

§ 2. Ehe ich auf die Verhältnisse der Abbildung am Rande näher eingehe, will ich eine für später wichtige Verallgemeinerung des bisher als konvex gedachten Gebietes vornehmen. Die Randlinie C sei teils konvex, teils konkav; jeder Radiusvektor, der von einem passend gewählten inneren Punkt O ausgeht, treffe sie nur einmal und schneide sie dabei unter einem wesentlich von 0 verschiedenen Winkel. Gleichbedeutend hiermit ist die Annahme, dass die Gesammtheit aller Tangenten von C einen Teil des Inneren nicht überdeckt (und in diesem Teil ist der Punkt O zu wählen; O soll bei der Abbildung wieder dem Kreismittelpunkt entsprechen).

Ueber die Natur der Randlinie scheint man jetzt etwas mehr voraussetzen zu müssen als bisher. Jedenfalls genügt es, wenn für die konkaven Teile noch angenommen wird, dass es an jedem Punkt einen Berührungskreis gibt, der ganz ausserhalb C liegt und nur die Berührungsstelle

[1]) Harnack hat sich auf die Green'sche Funktion beschränkt und dafür den Schwarz'schen Beweis beträchtlich vereinfacht, indem er den Satz aufstellte: „Eine konvergente Reihe aus positiven Potentialen ist im Innern ihres Konvergenzbereiches gleichmässig konvergent und damit selbst ein Potential.“ Dieser Satz hat später noch an Bedeutung ge-

mit C gemein hat. Man kann dafür auch sagen: es soll einen Kreis von endlicher, festbleibender Grösse geben, welcher aussen an C hinrollen kann und immer C nur an einer Stelle berührt[1]). (Wenn C überhaupt Ecken hat, sind es deshalb nur ausspringende.)

Aussen um C verlaufe eine äquidistante Kurve C″ im Abstand η (bei den ausspringenden Ecken treten wieder Kreisbogenstücke als Teile dieser Kurve auf). Zu C″ werde ein ähnlich verkleinertes Bild entworfen, indem man jeden von O ausgehenden Radiusvektor im Verhältnis $1 : (1 + \delta)$ verkürzt. Ist dann δ in passender Weise proportional zu η bestimmt und ist η selbst hinreichend klein[2]), dann soll bewiesen werden, dass das Bild von C″ innerhalb C liegt.

Als Grundgedanke zum Beweis kann folgender dienen: $\rho^{(o)}$ sei die untere Grenze für den senkrechten Abstand aller Tagenten der Linie C von O. Dann ergibt die Figur[3]) $PQ : OP = PP'' : ON \leqq \frac{\eta}{\rho^{(o)}}$. Gesucht ist eine Grenze

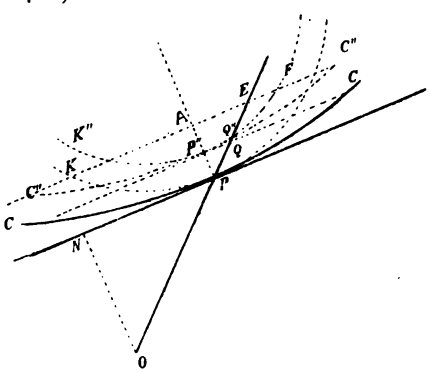
wonnen als eine der Grundlagen für die Poincaré'sche Methode der Auskehrung (balayage). American Journal Bd. 12. — Beiläufig wird Harnack durch seinen Satz auch frei von der Beschränkung auf ein konvexes Gebiet.

[1]) Nimmt man von den konkaven Kurventeilen an, dass sie stetige oder doch abteilungsweise stetige Krümmung besitzen, dann sind die genannten äusseren Berührungskreise oder der aussen rollende Kreis gewiss vorhanden und man ist sicher frei von unzuverlässigen Raumvorstellungen. Ich verweise darüber auf § 16 und auf den Anhang der „zweiten" Neumann'schen Abhandlung „über die Methode des arithmetischen Mittels" (1888). Dort ist eine Linie von stetiger Krümmung benutzt, aber die Abänderung ist leicht.

[2]) Bei konvexer Kurve ist diese Einschränkung für η unnötig.

[3]) Die Bezeichnung ist entsprechend wie bei Schwarz, Werke II, 112.

für PQ″ : OP. An den koncaven Randteilen liegt PQ″ zwar über PQ, es wird sich aber für kleines η verhältnismässig wenig davon unterscheiden, z. B. sicher kleiner als 2. PQ sein. Für $\delta = \frac{2\eta}{\rho^{(o)}}$ wäre dann $OQ'' : OP < 1 + \delta$ und das Bild von C″ für ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $1 : (1 + \delta)$ fiele ins Innere von C.



Das hier unter Benutzung der Anschauung ausgesprochene muss streng bewiesen werden. Dazu gehe ich aus von dem weiter oben eingeführten Kreis, welcher die Linie C in P von aussen berührt und sie sonst nirgends trifft. Er sei K, und sein fester, von P unabhängiger Radius sei R. Der concentrische Kreis K″ von Radius $R - \eta$ berührt C″ in P″ und hat weiter keinen Punkt damit gemein. Die Strecke PP″ auf der Kurvennormale werde um sich selbst verlängert. Durch den Endpunkt A zieht man eine Parallele zur Tangente in P, also eine Parallele im Abstand 2η. Es kommt darauf an zu zeigen, dass bei hinreichend kleinem η der verlängerte Radiusvektor OP erst C″ und dann diese Gerade trifft. Dazu genügt, dass erst K″ und dann die Parallele getroffen wird, weil K″ ausserhalb C″ liegt. Ist $\alpha_o\ (> o)$ die untere Grenze

für den Schnittwinkel α des Radiusvektor mit C[1]), dann schneidet der verlängerte Radiusvektor auf der Parallelen das Stück $AE \leqq 2\eta \,.\, \mathrm{ctg}\, \alpha_0$ ab. Der Kreisbogen K″ aber erzeugt das Stück $AF = \sqrt{\eta \,.\, (2R - 3\eta)} = \sqrt{2R\eta - 3\eta^2}$ und dies ist $> 2\eta \,.\, \mathrm{ctg}\, \alpha_0$ für $\eta \leqq \eta_0 = \dfrac{2R}{3 + 4 \,.\, \mathrm{ctg}\, \alpha_0}$. Für solches η trifft die Verlängerung von OP erst K″ und dann die Parallele, d. h. auch C″ vor der Parallelen. Damit ist alles Wesentliche zur Verallgemeinerung der Schwarz'schen Arbeit gegeben.

§ 3. Die zu Ende von § 1 besprochenen Bedenken können erledigt werden im Anschluss an eine Arbeit von Hrn. Painlevé (Compt. Rend. 1891[1] S. 653—56). Diese schliesst sich eigentlich an das Harnack'sche oder das Neumann'sche Verfahren an. Sie gilt (soweit sie hier in Frage kommt) für ein konvexes Gebiet, doch lässt sie sich auf das in § 2 benutzte übertragen. Vorläufig liege noch ein konvexes Gebiet ohne Ecken vor.

Hr. Painlevé betrachtet den Winkel ω zwischen einer Niveaulinie der Green'schen Funktion[2]) ($u = -c$, $c > 0$) und einem von O ausgehenden Radiusvektor. O ist wieder ein fester Punkt im Innern des konvexen Gebiets und zugleich der Unendlichkeitspunkt der Green'schen Funktion. ω zeigt sich als Potential $\Omega(x,y)$ für das Innere des Gebietes.[3]) Das Verhalten von $\Omega(x,y)$ am Rand

---

[1]) α_0 ist mindestens $\arcsin \dfrac{\rho^{(0)}}{\rho_2}$, wo ρ_2 wie bei Schwarz der grösste Radiusvektor der Kurve ist.

[2]) Ich benutze die Green'sche Funktion in demselben Sinn wie am Schluss von § 1.

[3]) Beiläufig gleich $R\left(i \cdot \lg\left\{i \cdot z \dfrac{d(u+vi)}{dz}\right\}\right)$ für geeignete Festsetzung des Winkels; a. a. O. ist die endliche Funktion

ist zunächst festzustellen. x_o, y_o sei ein Punkt von C, $\overline{\omega}(x_o, y_o)$ sei der Winkel zwischen Radiusvektor und Randlinie an dieser Stelle. Behauptung ist, dass $\Omega(x,y)$ die Randwerte $\overline{\omega}(x_o, y_o)$ hat.

Hr. Painlevé führt ein stetiges Potential $V(x,y)$ ein, welches gerade die Randwerte $\overline{\omega}$ hat, und er benutzt weiter ein Potential $\Omega_n(x,y)$, welches dem $\Omega(x,y)$ ganz analog gebildet ist und sich auf ein dem C einbeschriebenes geradliniges Polygon p_n bezieht. Für hinreichend viele und kleine Seiten des Polygons wird gezeigt, dass sich $\Omega_n(x,y)$ von $V(x,y)$ und von $\Omega(x,y)$ beliebig wenig unterscheidet, falls man von einem Randstreifen des ursprünglichen Gebietes absieht. Hierauf beruht die Gleichheit des $V(x,y)$ und $\Omega(x,y)$ im Innern von C.

Diese Behandlung setzt die Existenz des Potentials $V(x,y)$ zu den Randwerten $\overline{\omega}$ voraus (vgl. die Neumannsche Methode des arithmetischen Mittels).[1]) Bei dem hier vorliegenden Zweck, d. h. zur Ergänzung des in §§ 1, 2 Stehenden, muss man das Verfahren abändern.

§ 4. Ich benutze gleich das Gebiet des § 2, wo der Radiusvektor von O aus die Kurve immer nur einmal trifft und schief durchschneidet. Dann liegt $\overline{\omega}(x_o, y_o)$ zwischen o u. π mit Ausschluss dieser Grenzen $\left(0 < \alpha \leqq \overline{\omega}(x_o, y_o) \leqq \beta < \pi\right)$, was später zu der wesentlich verwendeten Endlichkeit von ctg $\Omega(x, y)$ führt. Ecken des Gebiets sollen erst nachher betrachtet werden. Mit C″ werde eine äquidistante Kurve im kleinen Abstand η innerhalb C[2])

$g = u - \lg r$ benutzt und der Faktor z fehlt dort, es müsste $R\left(i \lg i\left\{z \cdot \frac{dk}{dz} + 1\right\}\right)$ statt $R\left(i \lg i\left\{\frac{dk}{dz} + 1\right\}\right)$ heissen.

[1]) Zum Teil darauf beruht die Einschränkung auf konvexes Gebiet.

[2]) Das weicht von §§ 1, 2 ab.

bezeichnet, mit P_n ein Polygon von n Seiten, welches in dem Streifen zwischen C und C″ verläuft. Dabei mag P_n an den konvexen Teilen von C etwa aus Sehnen, an den konkaven etwa aus Tangenten dieser Kurve bestehen[1]), damit der Richtungsunterschied von C und P_n für zwei Punkte desselben Radiusvektor beliebig klein wird bei Vermehrung und Verkürzung der Seiten. Die Punkte, in denen ein beliebiger Radiusvektor die Linien C, P_n und C″ trifft, mögen x_o, y_o, x', y' und x'', y'' sein. Dann ist nach der gemachten Annahme

$$\left| \Omega_n (x', y') - \bar{\omega} (x_o, y_o) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (1)$$

wenn ε beliebig klein gegeben ist und das Polygon hinreichend kurze Seiten hat. Denn die linke Seite ist der vorhin genannte Richtungsunterschied. Die Ungleichung bleibt auch gültig für beliebige Annäherung der Punkte x_o, y_o und x', y' an eine Polygonecke. In diesen Ecken hat $\Omega (x', y')$ zwei Werte je nach der Annäherung längs der einen oder der anderen Seite. Die Differenz dieser beiden Werte ist gleich dem kleinen Winkel zwischen der einen Seite und der Verlängerung der andern.

Hierauf beruht der Beweis, dass die Formel

$$\left| \Omega_n (x'', y'') - \Omega_n (x', y') \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

bei kleinem η und kurzen Polygonseiten nicht bloss dann gilt, wenn man die Umgebungen der Polygonecken ausschliesst, sondern auch für beliebige Annäherung des Punktes x', y' an eine Ecke. Drittens erhält man noch

---

[1]) Auch mit einem äusseren Polygon käme man aus, man könnte auch z. B. überall Sehnen benutzen, an den konkaven wie an den konvexen Teilen.

unter den gemachten Annahmen über η und die Polygonseiten:

$$\left|\Omega(x'', y'') - \Omega_n(x'', y'')\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

weil im Innern sicher Lim $\Omega_n(x, y) = \Omega(x, y)$ ist. Die drei Formeln zusammen geben

$$\left|\Omega(x'', y'') - \bar{\omega}(x_0, y_0)\right| < \varepsilon$$

und zwar unter der Voraussetzung eines hinreichend kleinen η, denn mit den besonderen Eigenschaften des P_n hat diese Ungleichung nichts zu thun. Für Annäherung auf dem Radiusvektor schliesst sich $\Omega(x, y)$ stetig an die Randwerte an. Diese Stetigkeit ist gleichmässig (Ecken von C sind noch ausgeschlossen), und daraus lässt sich erkennen, dass $\Omega(x, y)$ an einer Randstelle für alle Annäherungsrichtungen denselben Grenzwert hat [1]). Das folgt auch aus einer Abänderung der vorhergehenden Betrachtung, wenn man x_0, y_0 nicht auf dem Radiusvektor durch x', y', sondern nur in dessen Nähe annimmt.

Ecken von C sind für einige spätere Betrachtungen wichtig, darum sei folgendes bemerkt. Wenn die Ecken höchstens in endlicher Zahl vorhanden sind und in jede Ecke von C auch eine von P_n gelegt wird, so bleiben die Ungleichungen (1) und (3) im alten Umfange gültig, (2) aber gilt nur bei Ausschluss kleiner Umgebungen der Ecken von C, nicht mehr für beliebige Annäherung des x', y' an diese besonderen Polygonecken. Man weiss deshalb zunächst nur, dass $\Omega(x, y)$ sich den Randwerten $\bar{\omega}(x_0, y_0)$ anschliesst, wo diese selbst stetig sind. Aus der

[1]) Solche Stetigkeitsbetrachtungen finden sich zuerst wohl bei Heine (Crelles Journal Bd. 71, S. 360, 361) und Schwarz, Werke II, 188, dann auch in Painlevès These.

für $\bar{\omega}(x_o, y_o)$ geltenden Beziehung $o < \alpha \leqq \bar{\omega}(x_o, y_o) \leqq \beta < \pi$ folgt dann noch keineswegs das Gleiche für $\Omega(x, y)$ im ganzen von C umgrenzten Gebiet G.[1]); $\Omega(x, y)$ könnte ja an den singulären Stellen aus dem Intervall heraustreten. Es ist also nähere Prüfung des Verhaltens an den Ecken von C nötig.

Die beiden Seiten von P_n, welche in einer Ecke von C zusammenstossen, bilden dort einen endlichen Winkel, der im Grenzfall gleich dem Winkel zwischen den beiden Tangenten der Randkurve wird. Die Randwerte von $\Omega_n(x, y)$ bei dieser Ecke haben deshalb eine sprungweise Aenderung, die nicht beliebig klein wird bei Verkürzung der Seiten. Für die verschiedenen Annäherungsrichtungen an die singuläre Stelle besitzt $\Omega_n(x, y)$ bestimmte Grenzwerte, welche zusammen das ganze Intervall an der Sprungstelle der Randwerte ausfüllen. (Man kann das auf verschiedene Arten entwickeln, z. B. aus der Abbildung des Polygons auf eine Kreisfläche in Verbindung mit dem Verhalten eines Potentials in der Kreisfläche, dessen Randwerte abteilungsweise stetig sind). In einer hinreichend kleinen Umgebung der Ecke tritt $\Omega_n(x, y)$ nicht mehr als um eine beliebig kleine Grösse aus dem genannten Intervall heraus.

Im Innern von P_n schliesst sich aber $\Omega_n(x, y)$ an $\Omega(x, y)$ beliebig nahe an für passende Verkleinerung aller Polygonseiten. Daraus lässt sich erkennen, dass $\Omega(x, y)$ in der Umgebung einer Ecke von C im wesentlichen in demselben Intervall bleibt wie $\Omega_n(x, y)$, dass es den Grenzen o und π nicht beliebig nahe kommt. Der Beweis ist freilich nicht so einfach, wie er auf den ersten Blick

[1]) Man darf den Satz über das Maximum und Minimum eines Potentials nicht überschätzen.

scheinen könnte, eben weil die nahe Uebereinstimmung von $\Omega_n(x,y)$ und $\Omega(x,y)$ am Rande P_n vielleicht unsicher wird — aber er bietet auch keine wesentliche Schwierigkeit mehr.

Das Ergebnis ist: $\Omega(x,y)$ geht stetig in die auf C definierten Werte $\overline{\omega}(x_o,y_o)$ über, wo diese selbst stetig sind, d. h. wo C sich stetig biegt, und es hat an den Ecken ein solches Verhalten, dass man die Giltigkeit von

$$0 < \alpha \leqq \Omega(x,y) \leqq \beta < \pi$$

für das ganze Gebiet erkennt, welches zwischen C und einer sehr kleinen Kreislinie [1]) um O liegt.

Jede Niveaulinie von u wird deshalb durch einen von O ausgehenden Radiusvektor nur einmal getroffen und schief durchschnitten, ganz wie dies von der Randlinie C galt.

§ 5. Nun wird die Abbildung des von C begrenzten Gebietes G auf den Kreis $|s| \leqq 1$ [2]) betrachtet. Den Niveaulinien der Green'schen Funktion u entsprechen die Kreise $|s| = \text{const} \leqq 1$, den Radienvektoren von O aus entsprechen krumme Linien, welche diese Kreise stets unter denselben Winkeln schneiden, wie sie an den zugehörigen Stellen der anderen Ebene vorkommen. Aus den Grenzen, welche oben für diese Winkel sich ergaben, lässt sich analytisch ziemlich leicht nachweisen, dass dem Schnittpunkt eines Radiusvektor mit C noch ein völlig bestimmter Punkt auf dem Kreisrand $|s| = 1$ entspricht. Dreht sich der Radiusvektor in der z-Ebene stetig und

[1]) An ihr ist $\Omega(x,y)$ nahezu $\frac{\pi}{2}$. In O selbst ist $\Omega(x,y)$ zunächst nicht definiert, schliesslich aber gar nicht singulär, nach $\Omega(x,y) = V(x,y)$ (S. 8).

[2]) Jch benutze wieder die Bezeichnung von § 1, wobei nur die frühere Annahme über $\left(\frac{ds}{dz}\right)_{z=o}$ unnötig ist.

in gleichbleibendem Sinn, so bewegt sich der Punkt auf $|s| = 1$ nicht unstetig — s. auch § 6 — und kehrt seinen Umlaufssinn nicht plötzlich um. Ferner gilt der Satz: Wenn sich ein Punkt z aus dem Innern an eine bestimmte Stelle z_0 von C heranbewegt, so nähert sich sein Bildpunkt s stets derselben Stelle s_0 des Kreisrandes an. Die abbildende Funktion $s(z) = e^{u+iv}$ ist stetig in dem ganzen Gebiet G einschliesslich des Randes.

Die Beweise dieser Sätze sind bei Painlevé meist nur angedeutet, bieten aber keine besondere Schwierigkeit.

§ 6. Denkbar ist noch, dass beim Fortrücken eines Punktes z_0 am Rand von G sein Bild s_0 auf $|s| = 1$ einmal stehen bleibt. Dann wäre zwar immer noch $s(z)$ eindeutig und stetig einschliesslich des Randes, aber die inverse Funktion wäre es nicht. Zu einem Punkt am Kreisrand gehörte ein endliches Stück von C. Hr. Painlevé spricht neben der Eindeutigkeit von $s(z)$ auch die der inversen Funktion aus, aber ohne Beweis.

Ein Beweis lässt sich u. a. so geben, und vielleicht hatte Hr. Painlevé gerade diesen im Auge. Die Schwarz'schen Betrachtungen über die analytische Fortsetzung einer Funktion $f(z)$ haben im Wesentlichen den folgenden Grundgedanken: In einer Kurve von solchem Charakter, dass sie als Integrationsweg dienen kann, mögen zwei Gebiete zusammenstossen. Im einen Gebiet (einschliesslich des Kurvenstücks) sei die stetige und im Innern reguläre Funktion $f(z)$, im anderen Gebiet (wieder einschliesslich des Kurvenstücks) die ebensolche Funktion $f_1(z)$ gegeben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f_1(z)$ die analytische Fortsetzung von $f(z)$ ist, ist die, dass $f(z)$ und $f_1(z)$ an dem gemeinsamen Kurvenstück die gleichen Werte haben. (Bei Schwarz sind allerdings

nur eine spezielle Kurve und spezielle Funktionswerte auf ihr betrachtet, der Beweis für diesen allgemeinen Fall ist aber fast wörtlich derselbe; in dieser Allgemeinheit zuerst ausdrücklich ausgesprochen wurde der Satz in Painlevé's These).

Hätte jetzt $u+iv$ an einem endlichen Randstück[1]) von G den konstanten Wert $o+ic$, dann stellte ic in einem dort angrenzenden Flächenstück die analytische Fortsetzung von $u+iv$ dar, oder $u+iv$ wäre überhaupt konstant und zwar $= ic$ im ganzen Gebiet G. Das ist unmöglich.

Es lässt sich noch ein andrer Beweis geben, der aber mehr Voraussetzungen für die Randlinie nötig macht. Ich gehe darauf erst später ein (s. die zweite Anm. v. § 11).

§ 7. Das Ergebnis von §§ 1—6 ist folgendes:

In dem konvexen Gebiet von § 1 oder in dem allgemeineren Gebiet von § 2 (wo der Rand durch den von O ausgehenden Radiusvektor nur einmal getroffen und schief durchschnitten wird) gibt es eine Funktion $s(z) = e^{u+iv}$, welche stetig ist einschliesslich des Randes, und welche eine (1,1)-deutige Abbildung des Gebiets auf die Kreisfläche $|s| \leqq 1$ bewirkt.

Für das Innere ist die Abbildung konform, weil $s'(z)$ vorhanden, stetig und wesentlich von O verschieden ist. Wäre $s'(z)$ null, so verschwände auch $\frac{d(u+iv)}{dz}$ und es müssten durch den betreffenden Punkt mehrere Kurvenzweige $u = \text{const.}$ und ebensoviele Zweige $v = \text{const.}$ in der bekannten regelmässigen Anordnung hindurchgehen; dies wiederspricht aber dem einfachen Verlauf der Linien $u = \text{const.}$, vgl. Riemann's Dissertation art 21. Die Stelle

[1]) Das Stück darf z. B. auch eine Ecke enthalten.

$O(z = o)$ ist auch leicht zu behandeln. Eine andre Beweisart für $|s'(z)| > o$ findet sich in der zweiten Neumann'schen Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels (1888), S. 147—149. Hierdurch wurde ich erst auf die Wichtigkeit des Nicht-Verschwindens von $s'(z)$ für die Konformität aufmerksam.

Ueber die Natur der Randlinie gilt nur das in §§ 1, 2 Ausgesprochene. Es reicht sicher aus, wenn die Kurve keine einspringenden Ecken und ausspringende Ecken höchstens in endlicher Zahl hat, wenn die Teile zwischen den Ecken stetige oder abteilungsweise stetige Krümmung haben und wenn die Radienvektoren von O aus die Kurve nur einmal treffen und schief durchschneiden. Nach einer Anmerkung von § 2 ist man dann gewiss unabhängig von unsicheren Raumvorstellungen. (Eigentlich gehen diese Annahmen schon zu weit, s. §§ 1, 2).

Unentschieden bleibt noch die Konformität für die Ränder vom G und vom Kreis. Zur Durchführung dieser Untersuchung muss man mehr über die Randlinie voraussetzen als bisher. Ich gehe darauf erst am Schluss des Abschnitts ein (§ 11), weil für das hier Folgende (§§ 8—10) diese Nebenuntersuchung unnötig ist.

Ein Teil der Frage nach Konformität an den Rändern, nämlich die Frage nach der Winkeltreue — nicht auch die nach den Eigenschaften des Vergrösserungsverhältnisses — lässt sich mit einfachen Mitteln vollständig beantworten unter den bisher gemachten Voraussetzungen für den Rand, ohne dass die Existenz von $s'(z)$ dort überhaupt feststeht (s. § 10).

§ 8. Jetzt seien auf der Begrenzung des Gebietes G stetige oder abteilungsweise stetige Werte gegeben, und gesucht sei ein im Innern stetiges Potential mit diesen Randwerten.

Durch die Abbildung übertragen sich die Randwerte auf den Kreis $|s| = 1$, und es ist als wesentlich hervorzuheben, dass hierbei keine von ihnen ausfallen, weil nach § 6 das v oder $s(z) = e^{u+iv}$ nirgends auf einer Randstrecke konstant ist. In der Kreisfläche liefert das Poisson-Neumann'sche Integral

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\cdot d\psi$$

ein eindeutig bestimmtes Potential zu den Randwerten. Durch die Abbildung ist in G ebenfalls ein Potential definiert — indem man zusammengehörigen Punkten beider Flächen wieder gleiche Werte zuordnet — und dieses Potential hat gerade die gegebenen Randwerte. In der Umgebung der Stellen, wo die Randwerte sich sprungweise ändern, bleibt es jedenfalls endlich, weil dies in der Kreisfläche der Fall ist. Näher wird das Verhalten an diesen Punkten in § 9 untersucht werden.

Es kann in G kein zweites Potential mit denselben Randwerten geben, welches auch bei den oben genannten singulären Stellen endlich und im übrigen stetig bleibt. Sonst hätte man in der Kreisfläche zwei verschiedene durchaus endliche und bei Ausschluss kleiner Umgebungen der singulären Stellen stetige Potentiale mit gleichen Randwerten, was unmöglich ist (s. Schwarz II, 192—194).

§. 9. Die Randwerte eines Potentials in der Kreisfläche mögen bei $\psi = \psi_0$ eine endliche sprungweise Aenderung von $f(\psi_0 - 0)$ bis $f(\psi_0 + 0)$ erleiden. Weiter bleibe das Potential in der Umgebung dieser Stelle in festen endlichen Grenzen. Dann entspricht jeder Annäherung aus dem Innern an die singuläre Stelle ein bestimmter endlicher Grenzwert. Er hängt stetig ab von

der Endrichtung der beschriebenen Kurve, und er gehört dem Intervall von $f(\psi_0' - 0)$ bis $f(\psi_0 + 0)$ an. Dabei kommen alle Werte aus diesem Intervall wirklich vor. Der Grenzwert ist

$$\frac{\alpha}{\pi} \cdot f(\psi_0 - 0) + \frac{\beta}{\pi} \cdot f(\psi_0 + 0),$$

wenn α und β die beiden Teile sind, in welche der Randwinkel π durch die Endrichtung der Annäherung zerlegt wird.

Diese Eigenschaften folgen aus dem Poisson'schen Integral, und zwar besonders einfach aus der von Hrn. Schwarz gegebenen Deutung desselben (Werke II, 360, 361).

Es erscheint mir bemerkenswert, dass man hieraus ein ganz entsprechendes Verhalten eines Potentials am Rand des Gebietes G ableiten und ausserdem — für die Randteile zwischen den Ecken — die Winkeltreue der Abbildung von G auf den Kreis erkennen kann.

Das Potential U in G sei stetig ausser bei der Randstelle $M_0(x_0, y_0)$. Dort bleibe es in endlichen Grenzen, während die Randwerte eine sprungweise Aenderung von $f(\sigma_0 - 0)$ nach $f(\sigma_0 + 0)$ besitzen mögen. (σ sei die Bogenlänge der Randkurve, σ_0 der Wert für M_0). C. arctg $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ hat bei passendem C dieselbe Grösse der sprungweisen Aenderung am Rande bei M_0; $V = U - C.\ \text{arctg}\ \frac{y - y_0}{x - x_0}$ hat zu beiden Seiten von M_0 Randwerte, welche in M_0 stetig in einander übergehen. Dieses Potential könnte aber doch noch den Punkt M_0 als singuläre Stelle haben. Man betrachtet jetzt das Potential V_1 in der Kreisfläche, welches aus V durch die Abbildung hervorgeht. Zu M_0 gehöre M_0.

Bei M_0 bleibt V_1 in festen endlichen Grenzen, und seine Randwerte zu beiden Seiten von M_0 gehen ineinander stetig über. Nach einem für die Kreisfläche geltenden Satz, zu dessen Beweis Hr. Schwarz die Grundzüge angab (Werke II, 196), ist V_1 bei M_0 überhaupt nicht singulär, und gleiches gilt deshalb in der ursprünglichen Ebene für V bei der Stelle M_0: V ist dort stetig; in welcher Art man sich den Punkt M_0 aus dem Innern annähert, immer ergibt sich ein Grenzwert und zwar derselbe Grenzwert für alle Annäherungsrichtungen. Aus dem Verhalten von C. $\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}$ bei M_0 folgt, dass auch U für jede Annäherungsrichtung einen bestimmten Grenzwert in M_0 besitzt — was eines Beweises bedurfte — und dass dieser Grenzwert sich mit der Richtung stetig ändert und dem Intervall von $f(\sigma_0-0)$ bis $f(\sigma_0+0)$ angehört. Der Wert ist

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot f(\sigma_0-0)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot f(\sigma_0+0)$$

entsprechend wie beim arctg oder wie es am Kreisrand der Fall war.

Die Betrachtung ist nicht bloss auf die Randteile zwischen den Ecken beschränkt, sondern bleibt unmittelbar richtig für die Ecken, soweit sie nach §§ 1, 2 zugelassen sind. (Einspringende Ecken lassen sich übrigens leicht durch eine Hilfsabbildung erledigen, vgl. den Schluss von § 5 im zweiten Teil. Daraus folgt für einspringende Ecken dasselbe Verhalten eines Potentials bei sprungweiser Aenderung der Randwerte[1]).

[1]) Auf die Eigenschaften eines Potentials in der Umgebung einer Spitze, wenn auch nicht der allgemeinsten Art, gehe ich ein in § 6 des zweiten Teils.

Der nächste § wird beiläufig noch zwei Beweise für diesen wichtigen Satz bieten.

Der Satz über die Grenzwerte eines Potentials an einer Stelle, wo die Randwerte sich sprungweise ändern, ist ganz wesentlich für die Existenz der echten Brüche q_1 und q_2 beim Schwarz'schen alternierenden Verfahren, weil da gerade i. a. Potentiale mit nur abteilungsweise stetigen Randwerten auftreten.

Der Eindeutigkeitssatz am Schluss von § 8 lässt sich auch aus dem eben aufgestellten Satz entwickeln. Denn die Differenz von zwei Potentialen der dort genannten Eigenschaften wäre durchaus stetig und am ganzen Rand null, d. h. konstant gleich o. Diese Beweisart ist auch anwendbar auf die allgemeineren Gebiete von §§ 1, 5 des nächsten Teils und würde selbst keine Ausnahme erleiden bei den dort in § 6 besprochenen Spitzen.

§ 10. Die Winkeltreue für die Ränder bei der Abbildung von G auf die Kreisfläche lässt sich jetzt so beweisen. Ein Potential U mit sprungweiser Aenderung der Randwerte an der Stelle M_0 liege in G vor. U_1 sei das zugehörige (an entsprechender Stelle gleichwertige) Potential in der Kreisfläche. M_0 entspreche dem M_0. Man weiss schon, dass U für jede Annäherungsrichtung einen bestimmten Grenzwert in M_0 hat und dass dieser die Form $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot f(\sigma_0 - o) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot f(\sigma_0 + o)$ besitzt, und man weiss, dass Entsprechendes für U_1 gilt.

Zusammengehörige in M_0 bezw. M_0 endende Kurven liefern nach der Art, wie U_1 mittels U definiert ist, denselben Grenzwert von U bezgl. U_1. Und deshalb muss in beiden Ebenen eine Teilung des Randwinkels in dem-

selben Verhältnis eintreten.[1]) Für die Teile zwischen den Ecken von C und die zugehörigen Randstücke der Kreisfläche besteht volle Winkeltreue: Wenn eine in einen Randpunkt endende Kurve die Winkel α und β mit dem Rand bildet und wenn dort die Randkurve keine Ecke hat ($a + \beta = \pi$), so hat die Bildkurve in der Kreisfläche dieselben Winkel gegen den Kreisrand. Bei Ecken bleibt wenigstens das Verhältnis der Winkel erhalten, die Winkel am Kreisrand werden $\frac{\alpha\pi}{\alpha+\beta}$ und $\frac{\beta\pi}{\alpha+\beta}$.[2])

Wäre man speziell von $U = \operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}$ ausgegangen, dann hätte man die Betrachtung von § 9 nicht nötig und könnte schliesslich umgekehrt aus dem oben ausgesprochenen Satz und aus dem Verhalten eines Potentials am Kreisrand bei sprungweiser Aenderung der Randwerte das Ergebnis von § 9 ableiten.

Noch auf eine andere Art kann man die Winkeltreue der Abbildung für die stetig gebogenen Randteile nachweisen, aber nicht für das Gebiet von § 2, sondern nur für ein ganz konvexes Gebiet wie im § 1. Bei der Abbildung von G auf den Kreis $|s| \leqq 1$ (§ 5) wurden die Radienvektoren von O aus und die Niveaulinien von $u = \operatorname{Rlg} s(z)$ benutzt. In der Kreisfläche traten eine Schar krummer Linien und die Kreisschar $|s| = \text{const}$ auf. Beide Kurvennetze bildeten an entsprechenden Stellen gleiche Winkel. Das bleibt nach Painlevé noch richtig für die Ränder von G und vom Kreis: Der Radiusvektor trifft

[1]) Darin liegt auch ausgesprochen, dass die Bildkurve eine bestimmte Endrichtung hat, wenn dies von der ursprünglichen Kurve gilt.

[2]) Hier ist $\alpha + \beta < \pi$, doch ist der Satz leicht zu verallgemeinern.

die Randlinie C unter demselben Winkel, wie seine Bildkurve den Kreis $|s| = 1$.

Bei konvexem Gebiet ist die Wahl des Punktes O im Innern ganz willkürlich. Man kann O so wählen, dass die Gerade von O nach einer bestimmten Randstelle M_0 den Rand unter einem beliebig vorgeschriebenen Winkel trifft. Wenn zu O der Kreismittelpunkt gehören soll, bleibt dieser Winkel bei der Abbildung erhalten. Aber er bleibt auch erhalten, wenn man nachträglich die Kreisfläche in sich so transformiert, dass zu einer anderen ganz beliebigen Stelle innerhalb G der Kreismittelpunkt gehört. Damit ist die Winkeltreue nochmals bewiesen für die Randteile eines konvexen Gebietes, wenigstens abgesehen von den Ecken. Doch bietet das Verfahren in Verbindung mit Betrachtungen des nächsten Teils die Möglichkeit, den Satz von der Winkeltreue und den Satz von § 9 auch für konkave Randteile und für Randstücke mit Ecken zu beweisen.

§ 11. Als Abschluss der Betrachtungen von § 7 sind noch die Eigenschaften von $s'(z)$ für die unbegrenzte Annäherung an den Rand zu prüfen. Als hinreichend für die Bestimmtheit und Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ und damit von $s'(z)$ am Rande selbst folgt aus ziemlich umfangreichen Painlevé'schen Untersuchungen die Stetigkeit der Krümmung und ihres Differentialquotienten in Bezug auf die Bogenlänge[1]). An allen Stellen, in deren Nähe die Curve diesen Stetigkeitsbedingungen genügt, ist $s'(z)$ vorhanden und stetig. $s'(z)$ kann auch

[1]) Aelter als diese Painlevé'schen Untersuchungen sind die im dritten Abschnitt zu besprechenden Neumann'schen, welche — zunächst für konvexes Gebiet — dasselbe Ergebnis haben.

nicht längs endlicher Randstrecken verschwinden, weil s(z) nach § 6 nicht längs endlicher Strecken konstant ist[1]). In einzelnen Randpunkten, selbst in solchen, die für die Randlinie gar nicht singulär sind, könnte s'(z) noch verschwinden.

Für die Konformität am Rande ist es sehr wesentlich, dass s'(z) nicht verschwindet zwischen den singulären Punkten der Randlinie, d. h. den Ecken und den Stellen, wo die Krümmung oder ihr Differentialquotient sich sprungweise ändert. (Für diese Punkte selbst ist

---

[1]) Wenn die Kurve C keine Ecken und überall stetige Krümmung und solchen Differentialquotienten der Krümmung hat, so ist die nach der Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung $\frac{\partial u}{\partial v}$ am ganzen Rand vorhanden und stetig und u lässt sich darstellen als Potential der Masse -1 in O und einer einfachen Massenbelegung der Kurve C mit der Dichte $-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}$. Weiter hat diese Massenverteilung für das Aussengebiet das konstante Potential 0. Wäre jetzt $\frac{\partial u}{\partial v}$ — und damit s'(z) — an einer endlichen Randstrecke 0, so gingen dort das innere Potential u und das äussere, 0, ohne Singularität in einander über, das eine wäre die analytische Fortsetzung vom andern. Dies ist nicht der Fall, weil u nicht konstant $= 0$ ist. Dieser Beweis findet sich in der zweiten Neumann'schen Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels (1888) S. 116—118, auch schon i. w. im Buch über das logarithmische und Newton'sche Potential (1877) S. 77. Damit ist aufs Neue der Satz von § 6 über die Inkonstanz des s(z) am Rand erhalten. Doch braucht man hier viel weiter gehende Annahmen als dort. Ecken und selbst sprungweise Aenderungen der Krümmung oder ihres Differentialquotienten würden schwierige Untersuchungen nötig machen, ob sich dort $\frac{\partial u}{\partial v}$ noch so verhält, dass die ganze Darstellung von u mittels der Massenanordnung Sinn behält.

nicht einmal die Stetigkeit von $s'(z)$ sicher). Diese Frage bleibt nun auf Painlevé'scher Grundlage ganz unentschieden, aber Herr Neumann hat Methoden entwickelt, welche hier anwendbar sind. („Zweite Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels", 1888, S. 120—141). Die erste dieser Methoden, wo eine berührende Kreisfläche auftritt, ist kürzer und anschaulicher als die zweite — mit übergreifender Kreisfläche. Doch erwies sich die zweite als nötig, weil einige an sich sehr einleuchtende Annahmen über die Form der Niveaulinien $u = \text{const.}$ des vollen Beweises entbehrten. Diese von Herrn Neumann gemachten Annahmen scheinen sich vollkommen zu bestätigen. Nach Painlevé gehören zu einem konvexen Gebiet auch konvexe Niveaulinien der Green'schen Funktion u. Und die Krümmung dieser Niveaulinien lässt sich durch u und dessen partielle Differentialquotienten ausdrücken und als stetig erkennen. Die Kreislinie, welche den Rand berührt, ist für eine nahe daran verlaufende Niveaulinie $u = -\varepsilon$ eine übergreifende Kreislinie im Sinne des 3. Satzes von § 16 der Neumann'schen Abhandlung und schneidet damit die Niveaulinie wirklich nur zweimal. Jedoch bringt dieses Verfahren es mit sich, dass man über das Randstück noch etwas mehr voraussetzen muss, nämlich dass auch noch der zweite Differentialquotient der Krümmung in Bezug auf die Bogenlänge stetig sein soll. Die Betrachtung ersetzt daher nicht die „Methode der übergreifenden Kreisfläche" (a. a. O. § 20), wohl aber zeigt sie, dass die geometrischen Annahmen bei der „Methode der berührenden Kreisfläche" (§ 19) einwurfsfrei sind.

Zweiter Teil.

§ 1. Aus einzelnen konvexen Gebieten kann man im Sinne des „alternierenden Verfahrens“ nur solche allgemeinere Gebiete kombinieren, welche lauter konvexe Randteile, jedoch auch einspringende Ecken haben. Erwünscht ist dagegen die Behandlung von Gebieten mit teils konkaven, teils konvexen Randlinien. Ecken und Wendepunkte mögen höchstens in endlicher Zahl vorhanden sein, Spitzen seien zunächst ausgeschlossen. Die weiteren Voraussetzungen über den Charakter der Begrenzung werden später an geeigneter Stelle besprochen.

Zum Nachweis der Integrierbarkeit von $\Delta u = o$ in diesen Gebieten bei gegebenen Randwerten genügt es, wenn man an den konkaven Randstrecken — oder wenigstens an passenden endlichen Teilen derselben, welche zusammen die ganzen konkaven Randstrecken bilden — Flächenstücke abgrenzen kann, wofür die Integrierbarkeit von $\Delta u = o$ auf irgend eine Art beweisbar ist. Zugleich ist darauf zu achten, dass die einzelnen Flächenstücke so übereinander greifen, dass von den echten Brüchen q_1 u. q_2 mindestens einer für den Konvergenzbeweis vorhanden ist; das macht aber auch keine Schwierigkeit. (Vergl. § 9 im 1. Teil.)

Als einfachste Form der abzugrenzenden Gebiete empfiehlt sich die, wo der Rand durch das konkave Stück und eine konvexe Linie gebildet wird und wo zwei aus-

springende Ecken (oder zwei Wendepunkte) auftreten. Aus derartigen Gebieten und aus ganz konvexen lassen sich schliesslich die allgemeinsten früher genannten Gebiete zusammensetzen, in der Art, wie diese Zusammensetzung beim alternierenden Verfahren zu verstehen ist.

Die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen für solche einfache konvex-konkave Gebiete das Vorhandensein von Potentialen zu gegebenen stetigen oder abteilungsweise stetigen Randwerten sicher ist, habe ich auf folgenden drei Wegen zu lösen versucht.

§ 2. Einmal lag es nahe zu prüfen, ob sich das Verfahren der Schwarz'schen Arbeit „zur Theorie der Abbildung“ (Werke II, 108—132) auf diese Flächen verallgemeinern lässt. Das gelingt, sobald die Tangenten des konkaven Teils noch nicht das ganze Flächenstück überdecken (s. d. vorigen Abschnitt, bes. §§ 2, 7). Diese Form des konvex-konkaven Gebiets reicht für den vorliegenden Zweck vollkommen aus.

§ 3. Ein zweites Verfahren beruhte auf der Fragestellung: Kann man an der konvexen Seite eines Kurvenstücks ein Gebiet angeben, welches durch lineare Transformation oder durch Abbildung mit reciproken Radien ein ganz konvexes Gebiet liefert — ähnlich wie ein konvex-konkaves Kreisbogenzweieck sich immer in ein ganz konvexes umwandeln lässt?

Die Frage ist zu bejahen, falls es erstens zu jedem Punkt des Kurvenstücks einen Berührungskreis gibt, welcher auf der konkaven Seite liegt und nur die Berührungsstelle mit der Kurve gemein hat, und falls zweitens das Kurvenstück hinreichend kurz ist: Es soll noch einen Punkt (P) geben, der innerhalb aller betrachteten Berührungskreise liegt. (Hierbei wird man die einzelnen Kreise

möglichst gross wählen.) Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn die Kurve stetige oder abteilungsweise stetige Krümmung hat, s. § 2 im vorigen Abschnitt, die zweite lässt sich dann immer erfüllen.

Denkt man sich jetzt das Kurvenstück und das System der Berührungskreise mittels reciproker Radien abgebildet vom Centrum P aus, dann entsteht ein neues Kurvenstück mit einer Schar von Berührungskreisen, und das neue Kurvenstück liegt innerhalb dieser sämtlichen Kreise und ist daher konkav gegen das ebenfalls im Innern derselben liegende P. Der konvexen Seite der ursprünglichen Kurve entspricht die konkave Seite ihres Bildes [1]).

Nun lässt sich an der konkaven Seite der Bildkurve auf verschiedene Arten ein ganz konvexes Gebiet abgrenzen, dem ein konvex-konkaves an der konvexen Seite des ursprünglichen Kurvenstücks entspricht, z. B. kann die geradlinige Verbindung zwischen den Endpunkten der Bildkurve oder ein Kreisbogen zwischen diesen Geraden und P benutzt werden.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Potentialen mit gegebenen abteilungsweise stetigen Randwerten in dem konvex-konkaven Gebiet erhält man nun aus dem, was wegen §§ 1, 7, 8 des 1. Teils für die Bild-

---

[1]) Man kann auch solche Berührungskreise auf der konkaven Seite des Kurvenstückes benutzen, welche weiter keinen Punkt mit der Kurve gemein haben und welche alle durch einen gemeinsamen Punkt P gehen. (Diese Kreisschar erfordert keine anderen Voraussetzungen über das Kurvenstück als die oben genannten.) Bei der Abbildung von P aus entsteht ein Kurvenstück mit seinen Tangenten. Es hat keinen Wendepunkt, und seine konkave Seite entspricht wieder der konvexen des ursprünglichen Kurvenstückes.

kurve vorauszusetzen ist, und aus den für die Abbildung nötigen Annahmen. Ich führe das im einzelnen nicht nochmals an, jedenfalls ist abteilungsweise stetige Krümmung des ursprünglichen Kurvenstückes ausreichend. — Siehe auch § 1 im dritten Teil.

Das Kurvenstück sollte bisher keine Ecke haben und ebenso keinen Wendepunkt. Ein Wendepunkt ändert übrigens fast nichts an der Betrachtung. Auch einzelne Ecken, bei denen der Innenwinkel des abzugrenzenden Flächenstückes jedesmal unter π liege und wobei die Linienstücke teils konkav, teils konvex sein können, stören nicht; die Berührungskreise müssen nur das zugehörige Kurvenstück nicht schneiden, die unter Bildung von Ecken anstossenden Bogen dürfen und werden sie i. a. schneiden. Natürlich müssen wieder alle Berührungskreise das Transformationscentrum umschliessen. Dann ist alles leicht zu erledigen. Diese Nebenbetrachtung betreffs der Wendepunkte und Ecken ist besonders für §§ 5 und 8 wichtig.

§ 4. Meine dritte Methode ging aus von einem besonderen alternierenden Verfahren zur Integration von $\Delta u = o$ im gemeinsamen Stück T^* zweier Gebiete T_1 u. T_2, deren Ränder sich durchkreuzen, und in denen die Integration von $\Delta u = o$ möglich ist. Dieses Verfahren, auf welches ich noch zurückkomme, war dann besonders anzuwenden auf den Fall, wo ein konvex-konkaves Gebiet als gemeinsamer Teil eines konvexen Flächenstücks und des Aussengebiets um eine konvexe Kurve auftritt. Es wird also ausser der Integration von $\Delta u = o$ innerhalb einer konvexen Linie auch die im Aussengebiet um eine konvexe Kurve benutzt.

Darauf will ich zuerst eingehen; ich sehe dabei ab von der Neumann'schen Methode des arithmetischen

Mittels, weil ich diese erst im nächsten Teil zusammenhängend besprechen will.

Ein Versuch, das in § 1 des vorigen Abschnitts besprochene Schwarz'sche Verfahren zu übertragen auf das Aeussere einer konvexen Kurve, zeigte sich durchführbar, aber man braucht da für diejenige Umformung, welche der ähnlichen Verkleinerung im Verhältnis $1 : (1 + \delta)$ entspricht, ganz dieselben Nebenbetrachtungen wie in § 2 des vorigen Abschnitts. Darum ist es einfacher, das Aeussere einer konvexen Kurve gleich auf ein solches endliches Gebiet zurückzuführen, wie es dort betrachtet wurde. Das gelingt durch Transformation mit reciproken Radien von einem beliebigen inneren Punkt der konvexen Linie aus. Bei der Anwendung ist die konvexe Linie nur z. T. gegeben, nur so weit, als sie den konkaven Rand des sichelförmigen Gebietes bildet; das übrige kann willkürlich ergänzt werden.

Auf mein alternierendes Verfahren für das gemeinsame Stück zweier Gebiete brauche ich hier deshalb nicht weiter einzugehen, weil ich später fand, dass es i. w. mit der zweiten Neumann'schen Kombinationsmethode vom Jahre 1870 (und zwar der „ersten Form" dieser Methode) übereinstimmt. Angeregt war ich zur Aufstellung des Verfahrens durch die s. g. disjunktive Kombinationsmethode aus dem Buch über Abel'sche Integrale (2. Aufl., 1884), welche einen Spezialfall der ersten Neumann'schen Methode vom Jahre 1870 darstellt.

§ 5. Durch die vorhergehenden Untersuchungen ist das Vorhandensein von Potentialen zu gegebenen stetigen oder abteilungsweise stetigen Randwerten gezeigt unter folgenden Voraussetzungen: Die Begrenzung des Gebietes

darf aus mehreren getrennten Teilen[1]) bestehen, jede Randlinie darf Ecken und Wendepunkte in endlicher Zahl haben. Und die weiteren Bedingungen für die Begrenzung lassen sich — allerdings etwas auf Kosten der hier erreichbaren Allgemeinheit — am besten dahin zusammenfassen, dass man abteilungsweise stetige Krümmung fordert. (Siehe auch § 1 im dritten Teil.)

Ueber das Verhalten von Potentialen an Randstellen, wo die Randwerte sich plötzlich ändern, ist in §§ 9, 10 des ersten Teils das Wesentliche gesagt. An der betreffenden Stelle des jetzt vorliegenden allgemeinen Gebietes kann man nämlich entweder direkt ein Flächenstück abgrenzen, wie es a. a. O. betrachtet wurde, oder wenigstens ein Stück, welches durch eine einfache Transformation auf ein solches führt. Dieses Hilfsgebiet kann auch immer konvex gewählt werden, s. den Schluss von § 3. Ecken mit einem Innenwinkel über π sind durch eine Transformation der Form $z_1 = (z - z_0)^\lambda$ leicht zu erledigen.

Der Eindeutigkeitssatz über Potentiale mit gegebenen abteilungsweise stetigen Randwerten ist ebenfalls im ersten Teil (§§ 8, 9) besprochen worden.

§ 6. Spitzen waren bisher ausgeschlossen. Einspringende Spitzen, d. h. solche mit dem Innenwinkel 2π[2]) lassen sich behandeln durch Kombination zweier Gebiete, welche an der betreffenden Stelle nur Ecken haben. Auch kann man eine solche Spitze beseitigen durch Abbildung

[1]) S. z. B. Schwarz II, 136 unten, 157 unten. In neueren Kompendien ist das mehrfach übersehen worden, weshalb für mehrfach zusammenhängende Gebiete andere Methoden, z. B. eine Schwarz'sche allgemeinere Methode, Werke II, 303, 304 herangezogen wurden.

[2]) Ich beschränke mich auf Gebiete, welche die Ebene nur einfach bedecken.

mittels $z_1 = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}$, wenn z_0 dem Rückkehrpunkt entspricht.

Von ausspringenden Spitzen, von Ecken mit dem Innenwinkel o, kann man auf einfache Art nur die behandeln, wo die beiden zusammenstossenden Bogen am Rückkehrpunkt verschiedene Krümmungskreise haben, wo also die Berührung beider Teile nur von der ersten Ordnung ist. Ob die Bogen einander die konvexe Seite zukehren oder nicht, ist dabei gleichgültig.

Eine Abbildung durch $e^{-\frac{1}{z-z_0}}$ liefert zwei in einer Ecke zusammenstossende Kurvenstücke; die beiden getrennten Tangenten im Eckpunkt entsprechen den zwei Krümmungskreisen am Rückkehrpunkt.[1]) Durch diese Zurückführung der Spitze auf eine Ecke erkennt man, dass das Ergebnis des letzten § dahin zu verallgemeinern ist, dass auch Spitzen der eben betrachteten Arten auftreten können.

Wenn jetzt die Randwerte eines Potentials sich gerade in einem Rückkehrpunkt der Begrenzung sprungweise ändern und wenn der Innenwinkel dieser Spitze 2π ist, so ordnet sich das Verhalten des Potentials völlig dem früher im 1. Teil Ausgesprochenen unter (§§ 9,10). Ist aber der Innenwinkel 0 (und findet nur einfache Berührung beider Bogen statt), dann spielt die Kreisschar eine wichtige Rolle, welche dem Strahlenbüschel bei der Ecke zugeordnet ist. Für die Annäherung an den Rückkehrpunkt längs eines Kreisbogens, welcher aus dem Innern des Gebiets in die Spitze hineinläuft und dort die Spitzentangente berührt, hat das Potential einen bestimmten

[1]) Eine andere Behandlung dieser Spitzen, durch ein alternierendes Verfahren, ist weniger einfach und sei deshalb nur erwähnt.

Grenzwert, und dieser Wert ändert sich stetig mit der Krümmung des Kreisbogens. Der Wert liegt zwischen den Grenzwerten, welche zu den beiden Teilen der Randkurve selbst gehören, und dieses Wertintervall wird durch die zu den einzelnen Kreisbogen gehörenden Werte ganz ausgefüllt.

Die Abhängigkeit des Grenzwertes von der Krümmung des Kreisbogens, auf den er sich bezieht, ergiebt sich aus der Hülfsabbildung, und man erhält einen sehr einfachen Ausdruck: Bei Aenderung des Kreisbogens ist die Aenderung des Grenzwertes direkt proportional zur Grösse der Drehung der zugehörigen Geraden in der Hülfsebene, oder zur Grösse der Parallelverschiebung derjenigen Geraden, welche aus dem Kreisbogen durch $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ hervorgeht. Und das ist proportional zur Aenderung der Krümmung des Kreisbogens, vorausgesetzt dass man zur Vereinfachung der Ausdrucksweise die Krümmung teils positiv, teils negativ rechnet, je nachdem der Kreisbogen auf der einen oder andern Seite der Spitzentangente liegt.

Erfolgt die Annäherung an den Rückkehrpunkt nicht auf einem Kreisbogen, sondern auf einer allgemeineren Kurve, deren Krümmung bestimmt und (wenigstens in der Nähe des Endpunkts) stetig ist, so entscheidet der Endwert der Krümmung über den Grenzwert des Potentials, der Grenzwert ist der gleiche wie für die Annäherung auf dem zum Endpunkt gehörenden Krümmungskreis. Man erkennt dies wieder aus der Verwandlung der Spitze in eine Ecke, wobei eine Kurve mit ihrer Tangente im Endpunkt auftritt.

Zwei Potentiale, welche in einem Rückkehrpunkt der betrachteten Art eine gleiche sprungweise Aenderung der

Randwerte haben, besitzen eine Differenz, welche dort durchaus stetig, gar nicht mehr singulär ist. Die zugelassenen Arten von Spitzen stören deshalb den im ersten Teil und am Schluss des vorigen § besprochenen Eindeutigkeitssatz nicht.

§ 7. Ich gehe jetzt über zur Frage nach der konformen Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebietes T, welches einen endlichen Teil der z-Ebene einfach bedeckt. Die Randlinie habe Ecken, Wendepunkte und Spitzen der genannten Arten und erfülle auch im Uebrigen die Bedingungen von §§ 5,6.

z_0 sei ein Punkt im Innern des Gebietes. Dann gibt es ein stetiges Potential u_0, dessen Randwerte mit denen von $\mathrm{Rlg}\,(z - z_0) = \lg |z - z_0|$ übereinstimmen. $u = \lg |z - z_0| - u_0$ ist am Rande null und in z_0 negativ logarithmisch unendlich. u ist im ganzen Innern negativ, und die einzelnen Niveaulinien $u = \mathrm{const}\ (< 0)$ sind einfache geschlossene Linien ohne Knotenpunkte. (Siehe Riemanns Dissertation art. 21). [Wäre das Gebiet nicht einblättrig und endlich, so erfordert der Existenzbeweis von u i. a. ein alternierendes Verfahren, vgl Schwarz II, 164 Mitte bis 166 oben].

Aus $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ergibt sich das zu u adjungierte Potential v, welches durch einen Schnitt von z nach dem Rand in der bekannten Weise eindeutig gemacht werden kann und welches dann an dem Schnitt den Periodicitätsmodul 2π hat. Dieses v ist vorläufig nur im Innern definiert und stetig, weil man das Verhalten von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ bei Annäherung an den Rand nicht näher kennt. Darum bleibt die Bestimmtheit, Stetigkeit

und eindeutige Umkehrbarkeit von $F(z) = e^{u + iv}$ für den Rand und seine nächste Umgebung fraglich. Zunächst weiss man nur, dass durch $\zeta = F(z)$ das Innere des Gebiets T auf das Innere eines Einheitskreises $|\zeta| \leqq 1$ konform und (1,1)- deutig[1]) bezogen wird.

§ 8. Die Entscheidung lässt sich so geben: Die zu prüfende Randstelle sei in einer kurzen Randstrecke σ enthalten. An σ werde ein Flächenstück T aus T abgegrenzt von solcher Beschaffenheit, dass T gewiss (1,1)-deutig und stetig und, was das Innere betrifft, konform auf eine Kreisfläche abbildbar ist (vgl. § 7 im 1. Teil). Wenn man an §§ 2 ff. des ersten Teils anknüpft, darf σ konvex oder konkav sein oder einen Wendepunkt enthalten; auch eine ausspringende Ecke darf auftreten. Will man aber nur von der Abbildung eines konvexen Gebietes ausgehen, so ist der Schluss von § 3 in diesem Teil zu beachten. Einspringende Ecken, Spitzen mit dem Innenwinkel 2π und die in § 6 untersuchten Spitzen mit dem Innenwinkel o machen nach §§ 5, 6 auch keine Ausnahme.

Der Kreis, auf welchen T bezogen ist, werde in einen Halbkreis oder ein Kreissegment T_1 so transformiert, dass dessen geradlinige Begrenzungsstrecke σ_1 gerade dem Randstück σ von T entspricht. In dieses Gebiet T_1 überträgt sich das im ganzen T definierte u; ebenso überträgt sich das v nach T_1, wenn man von σ_1 absieht. Aber die Bestimmtheit und Stetigkeit des v bei und auf σ_1 ist jetzt leicht zu erkennen durch eine analytische Fortsetzung des u über σ_1 hinaus.

T_2 sei das zu T_1 symmetrische Gebiet an der andern Seite von σ_1. Wenn u_1 das Potential in T_1 ist, werde

[1]) Der Verlauf der Niveaulinien von u und v lehrt das, siehe auch § 7 im ersten Teil.

u_2 in T_2 so definiert, dass u_1 und u_2 in symmetrisch gelegenen Punkten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Jedes Potential ist dann stetig bis in die Gerade σ_1 hinein, und dort sind beide null, sie hängen deshalb stetig zusammen. Dass beide nur ein Potential sind, dass u_2 die analytische Fortsetzung von u_1 ist, sieht man so:

Auf einer Kreislinie[1]), deren Mittelpunkt auf σ_1 liegt und die nicht aus T_1 und T_2 heraustritt, haben u_1 und u_2 bestimmte stetige Werte. Das Poisson'sche Integral liefert zu diesen Randwerten ein Potential u_0 in der Kreisfläche, und u_0 verschwindet auf dem in der Kreisfläche liegenden Stück von σ_1. Am ganzen Rand der in T_1 liegenden Kreishälfte ist demnach $u_1 = u_0$, also auch im Innern dieses Halbkreises. Ebenso gilt für die ganze Fläche des anderen Halbkreises die Beziehung $u_2 = u_0$, d. h. u_2 ist die analytische Fortsetzung von u_1 über den im Kreis liegenden Teil von σ_1, und schliesslich über das ganze σ_1 hinaus.

Mit u_1, was dem u in T entsprach, ist v_1 über σ_1 hinaus fortsetzbar und insbesondre auf σ_1 bestimmt und stetig. Das v in T bleibt darum bestimmt und stetig bei Annäherung an σ und beim Fortgehen längs σ. Es ändert sich auch bei der Bewegung auf σ stets in demselben Sinne und ist nicht etwa eine endliche Strecke weit konstant, (v_1 kann nicht plötzlich den Sinn seiner Aenderung umkehren; auch kann es nicht auf einem Stück von σ_1 konstant sein, weil sonst $u_1 + iv_1$ im ganzen T_1 und T_2 konstant wäre[2]) — In der ursprünglichen Ebene sind u und v nicht über σ hinaus analytisch fortsetzbar,

---

[1]) Sind T_1 und T_2 Halbkreise, so wird man gleich den Begrenzungskreis als die Kreislinie verwenden.

[2]) Einen anderen Beweis bietet das Verfahren von § 6 im ersten Teil, angewandt auf $u+iv$ in der ursprünglichen Ebene.

wenn der betreffende Randteil nicht ein reguläres Stück einer analytischen Kurve ist; deshalb musste die Betrachtung über die Bestimmtheit und Stetigkeit des v am Rande zunächst in einer Hülfsebene durchgeführt werden. Bei einem Gebiet mit nur analytischen Randteilen, besonders etwa bei einem Polygon aus Geraden oder Kreisbogen sind die entsprechenden Betrachtungen einfacher.

Damit ist auch alles Nötige erwähnt zu einem vollständigen und ziemlich kurzen Beweis des Satzes, auf den sich die letzte Anm. von S. 2 bezieht. (An den Ecken des geradlinigen Polygons dient als T am einfachsten ein Kreissektor.)

§ 9. v ist im ganzen T (einschliesslich des Randes) bestimmt und stetig, natürlich abgesehen von dem Schnitt, falls man eindeutiges v haben will. Auf dem Rand ändert sich v beständig und immer in gleichem Sinn, es wächst bei einem Umlauf entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, am Schnitt nimmt es dann um 2π ab. $\zeta = F(z) = e^{u+vi}$ ist auch ohne den Schnitt eindeutig und stetig im ganzen T. Diese Funktion vermittelt eine (1,1)- deutige und stetige Abbildung des ganzen Gebiets T auf die Kreisfläche $|\zeta| \leqq 1$. Fürs Innere ist die Abbildung gewiss konform (S. § 7 im ersten Teil).

Die Winkeltreue der Abbildung für die stetig gebogenen Randteile lässt sich durch die Betrachtungen von § 10 des ersten Teils leicht zeigen. Man kann dazu ausgehen von einem Potential, dessen Randwerte an der zu prüfenden Randstelle von T eine sprungweise Aenderung besitzen — speziell von $\operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$ — und man kann dieses Potential und das ihm durch die Abbildung zugeordnete Potential in der Kreisfläche in der früher be-

sprochenen Art vergleichen. Das Verfahren gilt auch für die Ecken und einspringenden Spitzen. Da findet man wieder, dass der Winkel zweier im Eckpunkt endenden Kurven in demselben Verhältnis durch die Abbildung vergrössert oder verkleinert wird, wie der Innenwinkel der Ecke selbst. Für die ausspringenden Spitzen des § 6 ist dasselbe Verfahren anwendbar. Das Hülfspotential ist einfach zu bilden, und das Ergebnis ist nach dem in § 6 Entwickelten leicht zu übersehen.[1])

Zur vollen Konformität an den stetig gebogenen Randteilen gehören ausser der Winkeltreue noch die Bestimmtheit, Stetigkeit und das Nichtverschwinden des Vergrösserungsverhältnisses $|F'(z)|$. Unter Benutzung der Abbildung des kleinen Randgebietes T auf T_1 und auf Grund des Schlusses vom ersten Teil kann man diese Frage erledigen, abgesehen von gewissen singulären Stellen. Ich gehe darauf erst im nächsten Teil ein (§§ 4,5), weil es sich i. w. um Verwendung eines Neumann'schen Satzes handelt und weil dort diese Neumann'schen Arbeiten im Zusammenhang besprochen werden.

---

[1]) Eine andere Herleitung der Sätze erwähne ich nur kurz: Man kann das Ergebnis von § 10 des ersten Teils anwenden auf die Beziehung von T zu T_1, und T_1 ist durch $e^{u_1+iv_1}$ konform auf ein Flächenstück am Kreisrand $|\zeta| = 1$ bezogen. Dieser Grundgedanke kommt in §§ 4, 5 des nächsten Teils in etwas anderer Form mehr zur Geltung.

Dritter Teil.

§ 1. Herr Neumann hat durch seine Methode des arithmetischen Mittels Potentiale zu gegebenen Randwerten gebildet für das Innere und das Aeussere einer geschlossenen konvexen Linie. Auf die Bedingungen, denen die Kurve genügen muss, gehe ich später ein; die Randwerte sollen stetig oder abteilungsweise stetig sein.

Die Methode stammt mindestens aus dem Jahre 1869[1]), die Grundzüge sind mitgeteilt in den Leipziger Berichten vom Jahre 1870. Ausführliche Darstellungen finden sich im Buch über das logarithmische und Newton'sche Potential (1877) und in einer grossen Arbeit in den Abhandlungen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1887). Dort stehen auch manche früher noch nicht gegebene Nebenuntersuchungen.

Die konvexe Linie soll Ecken höchstens in endlicher Zahl haben und im Uebrigen gewisse Anforderungen erfüllen, welche für einige aus der Anschauung entwickelte Sätze nötig sind, s. S. 29—34 der zuletzt genannten Arbeit. Auf diesen Punkt kommt Herr Neumann in der „zweiten Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels" (1888) zurück (S. 23—25) und zeigt, dass eine stetige Biegung der Kurve zwischen den Ecken genügt. (Die Kurve wird in dieser Abhandlung analytisch gegeben,

[1]) S. die Einleitung der gleich zu nennenden Abhandlung v. J. 1887.

vgl. die 1. Anm. zu § 1 im ersten Teil. ϑ, der Winkel zwischen Tangente und x-Axe, soll sich abgesehen von den Ecken stetig ändern). Zur Voraussetzung einer abteilungsweise stetigen Krümmung würde kein Grund vorliegen. Allerdings ist bei einer Kurve mit abteilungsweise stetiger Krümmung der Beweis für $\lambda < 1$ leichter, aber nur wenn Ecken fehlen. (s. S. 5 der Abhandlung und S. 173 ff. im Buch über das logarithmische und Newton'sche Potential.)

Im Anschluss an §§ 3,4 des zweiten Teils kann man jetzt die dort in § 5 besprochenen recht allgemeinen Gebiete erledigen. Dabei muss man die a. a. O. benutzten Berührungskreise an den konkaven Kurventeilen voraussetzen, so dass jedenfalls die Annahme einer abteilungsweise stetigen Krümmung dieser Teile ausreicht. Wenn man aber im Falle des § 4 die Methode des arithmetischen Mittels im Aussengebiet um eine konvexe Kurve verwendet, so genügt schon die stetige Biegung der konkaven wie der konvexen Randteile.

Es ist mir nicht recht klar geworden, ob Herr Neumann auf diesem letzten Wege schon die Lösung des allgemeinen Problems gekannt hat. Seine Hülfsmittel reichen dazu aus. Ich glaube, dass diese Tragweite seiner Methoden bisher noch nicht allgemein bekannt war. Es scheinen mir übrigens manche Stellen darauf hinzudeuten, dass Herr Neumann die Lösung für das allgemeine Gebiet mit teils konvexer teils konkaver Begrenzung vorwiegend in anderer Richtung gesucht hat, nämlich durch Befreiung der Methode des arithmetischen Mittels von der lästigen (wenn auch zunächst sich naturgemäss darbietenden) Beschränkung auf eine konvexe Randlinie.

Dieses Ziel hat wohl die Poincaré'sche Abhandlung

„Sur le principe de Dirichlet et la methode de Neumann“ [1]) erreicht. Nur sind da die nötigen oder hinreichenden Voraussetzungen nicht immer genannt, z. B. haben gleich anfangs die Integrale wie $\int\int\int\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau$ öfter unter den angegebenen Voraussetzungen überhaupt keinen Sinn. Sie gewinnen solchen erst bei weiteren Annahmen über die Natur der Fläche und ihrer Belegung, worüber die in § 2 zu nennenden Neumann'schen Arbeiten Aufschluss geben. So unterliegen voraussichtlich die Poincaré'schen Resultate keinen Bedenken, nur sind sie gewiss weniger allgemein, als sie in jener Abhandlung erscheinen, und damit auch weniger allgemein, als man sie auf anderem Wege erhalten kann (soweit der Fall der Ebene in Betracht kommt).

Die bis jetzt behandelten Gebiete sind, wie in § 5 des vorigen Teils, noch solche ohne Spitzen. Aber das dort in § 6 über Spitzen Ausgesprochene gilt auch hier wieder.

§ 2. In den Leipziger Berichten vom Jahre 1878 und im 16. Band der Annalen ging Herr Neumann auf die Frage ein, wann die partiellen Differentialquotienten von Potentialen bestimmt und stetig bleiben bei unbegrenzter Annäherung an die Kurve oder Fläche, durch deren einfache oder doppelte Belegung die Potentiale selbst erzeugt sind. Zuletzt werden hierbei die Potentiale zu Grunde gelegt, welche zu gegebenen Randwerten in einem konvexen Gebiet gehören und durch die Methode des arithmetischen Mittels geliefert werden.

---

[1]) Acta Mathematica Bd. 20. (1895). Die Arbeit bezieht sich auf Potentiale im Raum, wird aber i. w. auch für die Ebene gelten.

In der schon erwähnten zweiten grossen Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels (1888) ist dies alles ausführlich dargestellt, und im letzten Abschnitt dieser Arbeit werden dann die Green'sche Funktion (u)[1]) und das zu ihr adjungierte Potential (v) nebst den zugehörigen ersten partiellen Differentialquotienten näher untersucht. Diese vier Potentiale u, v, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sind bis in den Rand hinein bestimmt und stetig[2]), wenn die konvexe Randlinie neben stetiger Biegung auch solche Krümmung und noch stetigen Differentialquotienten der Krümmung in Bezug auf die Bogenlänge hat. Damit ist auch die Abbildungsfunktion $F(z) = e^{u + iv}$ und ihr Differentialquotient $F'(z)$ bestimmt und stetig einschliesslich der Begrenzung. Dieselben Annahmen genügen für den besonders wichtigen, aber gerade recht schwierigen Nachweis, dass $F'(z)$ bei Annäherung an eine Randstelle der 0 nicht beliebig nahe kommt, sondern wesentlich von 0 verschieden bleibt.[3]) Damit ist erst völlig bewiesen, dass die Abbildung auch für die Ränder noch konform ist.

Als beiläufiges und nachher zu benutzendes Ergebnis der Abhandlung sei erwähnt, dass einzelne sprungweise Aenderungen der Biegung, Krümmung oder ihres Differentialquotienten die Bestimmtheit und Stetigkeit von $F(z)$ und $F'(z)$ an den Randteilen z w i s c h e n diesen singulären Punkten gar nicht beeinflussen können.[4])

Das $F(z)$ selbst bleibt übrigens bestimmt und stetig

---

[1]) Ich behalte meine frühere Bezeichnung bei.

[2]) Natürlich ist hierbei die Stelle z_0 im Innern u. (für v) der Schnitt von z_0 zum Rand ausgenommen.

[3]) Am Schluss des 1. Teils ist hierüber einiges gesagt.

[4]) Vgl. z. B. die zweite Bemerkung a. S. 43 der Abhandlung.

auch an den eben genannten Ausnahmepunkten des Randes. Recht einfach folgt das aus einer Betrachtung von Herrn Picard (Traité d'Analyse II, 277—78), von der ich den Grundgedanken wiedergebe: Wenn die betreffende Randstelle im positiven Sinn überschritten wird, so kann v nicht sprungweise abnehmen, wie man leicht aus den Niveaulinien von v schliesst. Bei einem sprungweisen Wachsen von v aber entspräche diesem einen singulären Randpunkt ein endliches Stück am Kreisrand $|\zeta| = 1$. An diesem Stück wäre die inverse Funktion von $\zeta = F(z)$ konstant, und doch ist sie nicht konstant im Innern der Kreisfläche $|\zeta| \leqq 1$. Darin liegt ein Widerspruch[1]).

§ 3. Gegeben sei ein endliches einblättriges Gebiet T in der z-Ebene. Es habe nur eine Randlinie, und diese sei bis auf einzelne Ecken und Spitzen der in § 6 des 2. Teils betrachteten Arten stetig gebogen und i. a. teils konkav, teils konvex. Dann steht die Existenz der Green'schen Funktion (u) fest. Um das Vorhandensein und die Stetigkeit des adjungierten Potentials v für die Begrenzung zu zeigen, braucht man weitergehende Voraussetzungen für die Randlinie; es genügt, wenn die Krümmung und ihr Differentialquotient in Bezug auf die Bogenlänge abteilungsweise stetig sind.

Dann lässt sich nämlich an einer kurzen Strecke σ des Randes von T ein Gebiet T abgrenzen, welches (1,1)-deutig, stetig und bis auf gewisse einzelne Randstellen konform auf ein Kreissegment T_1 mit dem geraden Randstück σ_1 abbildbar ist (nach § 8 im vorigen Teil und nach

[1]) Siehe § 6 im ersten Teil, wo der Satz von der analytischen Fortsetzung einer Funktion übrigens in allgemeinerer Form auftritt; hier genügt die übliche, an die ursprüngliche Schwarz'sche Veröffentlichung anknüpfende Form.

dem letzten §). Aus dieser Abbildung werden nun dieselben Schlüsse über das v auf σ_1 und auf σ gezogen wie in § 8 des 2. Teils. Das kurze Randstück σ kann dabei konvex oder konkav sein, oder auch einen Wendepunkt, eine Ecke oder Spitze enthalten — soweit Spitzen überhaupt zugelassen wurden.

Das Potential v erweist sich überall am Rande von T als bestimmt und stetig, es wächst beständig beim Fortgehen in positiver Richtung längs des Randes, und es wächst um 2π bei einem vollen Umlauf. $\zeta = F(z) = e^{u+iv}$ bildet das Gebiet T auf eine Kreisfläche $|\zeta| \leqq 1$ stetig und (1,1)-deutig ab. Für das Innere ist die Abbildung gewiss konform, s. S. 14 unten.

§ 4. Die Konformität besteht auch noch für diejenigen Randteile, an welchen die Biegung, Krümmung und ihr Differentialquotient in Bezug auf die Bogenlänge stetig sind. Zum Beweis benutzt man wieder ein kurzes Randstück σ, das angrenzende Flächenstück T und das zugehörige Stück T_1 in der z_1-Ebene. Im Innern des aus T_1 und seinem Spiegelbild T_2 bestehenden Gebietes (s. § 8 im 2. Teil) ist $\frac{d(u+iv)}{dz_1}$ durchaus regulär und wesentlich von 0 verschieden, wie der Verlauf der Niveaulinien von u und v zeigt (s. S. 14 unten). Insbesondere gilt dies für die gerade Strecke σ_1 ohne ihre Endpunkte. Ist weiter $z_1 = \Phi(z)$ die Funktion, welche T auf T_1 abbildet, so ist nach § 2 $\frac{dz_1}{dz} = \Phi'(z)$ längs σ (aber bei Ausschluss der Endpunkte) eindeutig bestimmt, stetig und von 0 verschieden. Dasselbe folgt darum für $\frac{d(u+iv)}{dz} = \frac{d(u+iv)}{dz_1}\frac{dz_1}{dz}$ längs dieses inneren Teils von σ.

Enthält dagegen die Strecke σ eine Ecke oder Spitze oder eine Stelle mit sprungweiser Aenderung der Krümmung oder des Differentialquotienten derselben, dann braucht dort $\Phi'(z)$ und damit auch $\frac{d\,(u + iv)}{dz}$ nicht mehr stetig und von 0 verschieden zu sein. An diesen besonderen Stellen des Randes — und gewiss nur da — kann demnach die Konformität aufhören, und bei Ecken und Spitzen ist das sicher der Fall, wie leicht zu sehen ist.

§ 5. Auf diese Ausnahmestellen ist noch etwas näher einzugehen.

Soweit an dem Randpunkt stetige Biegung, und nur eine sprungweise Aenderung der Krümmung oder ihres Differentialquotienten vorliegt, besteht sicher volle Winkeltreue (2. T., § 9), und ebenso bleibt für Ecken das Verhältnis der beiden Winkel, welche eine in der Ecke endende Kurve dort mit den Randteilen bildet, bei der Abbildung unverändert. (Das Verhalten bei ausspringenden Spitzen mit Berührung erster Ordnung führe ich nicht nochmals an).

Das Vergrösserungsverhältnis der Abbildung, $|F'(z)|$, für diese Stellen bleibt noch zu prüfen.

Wenn eine Ecke vom Innenwinkel γ ($0 < \gamma < \pi$ oder $\pi < \gamma < 2\pi$[1]) durch zwei Kreisbogen gebildet wird, so kann man dort ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\gamma, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ abgrenzen und dann mittels der im vorigen § eingeführten Funktion $\Phi(z)$ nachweisen, dass $F'(z)$ sich bei der Ecke in erster Annäherung wie $c \cdot (z - z_0)^{\frac{\pi}{\gamma} - 1}$ verhält. $F'(z)$ verschwindet daher bei $\gamma < \pi$, und zwar

[1]) Ich beschränke mich der Kürze wegen auf einblättrige Gebiete.

in der Ordnung $\frac{\pi}{\gamma} - 1$, es wird unendlich bei $\gamma > \pi$, in der Ordnung $1 - \frac{\pi}{\gamma}$. Ebenso erhält man bei einer von zwei Kreisbogen gebildeten ausspringenden Spitze ein Verschwinden von $F'(z)$ in unendlich hoher Ordnung, indem man wieder die Abbildung eines Kreisbogendreieckes mit den Winkeln $\gamma\ (=0)$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ benutzt. Das hiermit für Kreisbogen-Ecken festgestellte Verhalten von $F(z)$ selbst wie const. $+ C \cdot (z - z_0)^{\frac{\pi}{\gamma}}$ (bei $0 < \gamma < \pi$ und $\pi < \gamma < 2\pi$) entspricht ganz der Art, wie der Winkel irgend zweier in der Ecke zusammenstossender Kurven sich bei der Abbildung ändert. Ich lasse es dahingestellt, ob man daraus diesen Ausdruck const. $+ C \cdot (z - z_0)^{\frac{\pi}{\gamma}}$ als einzig mögliche Näherungsformel für $F(z)$ ableiten kann, allgemein für Ecken zwischen beliebig geformten Teilen der Randlinie. Ich nehme an, dass allgemein das Vergrösserungsverhältnis bei $\gamma < \pi$ verschwindet, bei $\gamma > \pi$ unendlich wird, dass auch die vorhin im besonderen Fall entwickelten Werte für die Ordnungen des Verschwindens oder unendlich Werdens allgemein gelten. Streng entscheiden könnte man das jedenfalls durch Zurückführung der Ecke auf eine Stelle mit stetiger Biegung mittes einer Transformation $z_1 = (z - z_0)^{\frac{\pi}{\gamma}}$, sobald der Fall stetiger Biegung und sprungweise sich ändernder Krümmung (und etwa noch eines solchen Differentialquotienten der Krümmung) sich gut erledigen liesse. Aus diesem Grund würde ich der Behandlung des eben genannten Falles einiges Interesse beimessen. Könnte man sonst die Betrachtung für

die Ecken ganz durchführen, dann würden die Verhältnisse es durchaus angebracht erscheinen lassen, wenn man sich bei den Randteilen zwischen den Ecken auf stetige Krümmung und solchen Differentialquotienten der Krümmung beschränkte, oder allenfalls sprungweise Aenderungen dieses Differentialquotienten zuliesse, weil sie noch gut zu behandeln sind, wie ich bald zeigen werde.

Herr Neumann hat sich mit Recht auf möglichst einfache Voraussetzungen über seine konvexe Randlinie beschränkt, damit die Rechnungen verhältnismässig kurz ausfielen und die leitenden Gedanken klarer hervortraten. (Zweite Abhandlung S. 14, 15.) Einfach sich darbietende und hinreichende Voraussetzungen zu geben, und nicht die geringsten war sein Plan. Wenn ich hier seine Voraussetzungen etwas abzuschwächen suche, so geschieht dies nur aus dem vorhin genannten Grund.

Die für §§ 19, 20 der Abhandlung wesentlichen geometrischen Sätze in § 16 und im Anhang gelten z. T. unter der Annahme, dass die Biegung und die Krümmung des Kurvenstücks stetig sind. Nur beim letzten Satz von § 16 wird noch ein stetiger Differentialquotient der Krümmung in Bezug auf die Bogenlänge benutzt. Diese Voraussetzungen waren vorteilhaft und schon deshalb natürlich, weil sie bei früheren Sätzen, im zweiten Kapitel, gemacht worden waren. Da, wo neben stetiger Biegung nur noch stetige Krümmung verlangt ist, lassen sich einzelne sprungweise Aenderungen der Krümmung als zulässig erkennen; teils braucht man dabei ein anderes Restglied der Taylor'schen Reihe. Unter der gleichen Annahme einer stetigen Biegung und abteilungsweise stetigen Krümmung lässt sich der dritte Satz von § 16 beweisen, indem man in der Taylor'schen Reihe ein Glied weniger

und das andere Restglied verwendet. Ähnlich ist es in § 17.

Wüsste man deshalb, dass $F'(z)$ an einer Randstelle bestimmt und stetig bliebe, wo die Biegung stetig ist, aber die Krümmung und etwa noch ihr Differentialquotient sich sprungweise ändern, dann folgte aus §§ 19, 20 für diesen Randpunkt $F'(z)$ als wesentlich von 0 verschieden. Praktisch ist hiermit leider nichts gewonnen, denn unter diesen geringen Voraussetzungen scheint sich nichts über die Bestimmtheit und Stetigkeit von $F'(z)$ aussagen zu lassen. Man kann die Betrachtungen des zweiten Kapitels allerdings dahin verallgemeinern, dass einzelne sprungweise Aenderungen des Differentialquotienten der Krümmung vorkommen. Das erschwert an manchen Stellen die Beweise und ändert auch einzelne Sätze, beeinflusst jedoch nicht das später in §§ 18 ff. benutzte Hauptergebnis. Unstetigkeiten der Krümmung aber scheint man in die Betrachtung nicht recht einführen zu können.

Wo daher die Randlinie zwischen den Ecken stetige Krümmung und mindestens abteilungsweise stetigen Differentialquotienten der Krümmung in Bezug auf die Bogenlänge hat, da ist $F'(z)$ eindeutig vorhanden, stetig und wesentlich von 0 verschieden. Bei einem plötzlichen Wechsel der Krümmung dagegen sind die Bestimmtheit, die Unabhängigkeit des $F'(z)$ von der Richtung und seine Stetigkeit nicht mehr sicher. Ständen diese Eigenschaften auf Grund besonderer Betrachtungen fest, dann wäre auch hier der Wert wesentlich von 0 verschieden. Dass diese Stellen keine Ausnahme von der Winkeltreue bewirken, und ebenso was bei Ecken und Spitzen an die Stelle der Winkeltreue tritt, ist schon früher ausgesprochen worden.

§ 6. Ich gehe noch kurz ein auf die konforme Abbildung bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten, im Anschluss an die Arbeiten von Herrn Schottky.

Ein ebenes einblättriges Gebiet G werde begrenzt von einer sich nicht selbst durchdringenden Linie L_0 und von mehreren solchen Linien L_1, $L_2 \ldots L_\rho$, die innerhalb L_0 liegen und einander ausschliessen. Sind die Linien entweder selbst reguläre analytische Kurven oder bestehen sie aus einer endlichen Zahl von Stücken solcher Kurven, dann sind gewisse „allgemeine Green'sche Funktionen" vorhanden, von denen ich nur eine näher anführen will:

Es giebt ein Potential u mit dem Unendlichkeitspunkt 0 ($z=z_0$) im Innern von G, von der Beschaffenheit, dass $u-\lg|z-z_0|$ im ganzen G stetig ist. Weiter verschwindet u an L_0, während es an $L_1 \ldots L_\rho$ konstante Werte $c_1 \ldots c_\rho$ hat; und das Integral

$$\int \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right\} = - \int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \text{ [1]}$$

hat für L_0 den Wert 2π, für $L_1 \ldots L_\rho$ aber immer den Wert 0.

Dann besitzt das zu u adjungierte Potential v $\left(\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ bei positivem Umlauf um L_0 die Aenderung 2π, und es wächst bei solchem Umlauf immer. Bei einem vollen Umlauf um L_α ($\alpha = 1 \ldots \rho$) kehrt v zu seinem Anfangswert zurück, es ändert sich dabei beständig und der Sinn seiner Aenderung erleidet nur zweimal, in den zwei „kritischen" Punkten von L_α, eine Umkehrung. Die Schwankung des v auf L_α beträgt dabei weniger als 2π. Endlich folgt noch, dass die Werte $c_1 \ldots c_\rho$ unter 0 liegen.

[1]) n sei die nach dem Inneren von G gerichtete Normale.

Verfolgt man nun geometrisch den Verlauf der Funktion $\zeta = F(z) = e^{u+iv}$, so bildet sich das ganze Gebiet ab auf eine Kreisfläche vom Radius 1, wobei zu L_0 der Aussenrand $|\zeta| = 1$, zu O der Mittelpunkt $\zeta = 0$, zu zu $L_1 \ldots L_\rho$ Kreisbogen mit dem Mittelpunkt $\zeta = 0$ und den Radien $e^{c_1} \ldots e^{c_\rho}$ gehören. Die Endpunkte eines solchen Bogens entsprechen den beiden kritischen Punkten der betreffenden Linie L_α. Der Bogen selbst ist als Schnitt in der Kreisfläche aufzufassen, jedem Schnittrand entspricht einer der beiden Teile, in welche L_α durch die kritischen Punkte zerlegt wird. Dann ist die Beziehung von G auf die mit Schnitten versehene Kreisfläche (1,1)-deutig, für die inneren Punkte und die Randpunkte. Ferner besteht Konformität, abgesehen von den 2ρ kritischen Stellen und i. a. noch von den Randpunkten, wo zwei Teile verschiedener analytischer Kurven zusammentreffen.

Die Betrachtung gewinnt an Anschaulichkeit, wenn man die Niveaulinien $u = c\ (>0)$ und die Kreise $|\zeta| = e^c$ ins Auge fasst. $c_1 \ldots c_\rho$ seien sämmtlich verschieden[1]) und mögen (durch passende Bezeichnung $L_1 \ldots L_\rho$) eine abnehmende Reihe bilden. Stimmt c mit keinem der c_α überein, so ist $u = c$ eine einfache, sich nicht selbst durchdringende Kurve von stetiger Biegung. Ferner umschliesst sie den Punkt O und die Linien $L_\alpha \ldots L_\rho$, wenn c_α die erste unter c liegende Zahl unter den $c_1 \ldots c_\rho$ ist. Für $c = c_\alpha$ aber besteht die Linie $u = c$ aus L und einer einfachen, stetig gebogenen Kurve, welche die beiden kritischen Punkte von L_α verbindet und den Punkt O und die etwa noch vorhandenen Linien $L_{\alpha+1} \ldots L_\rho$ umschliesst.

[1]) Die Ausnahmefälle sind leicht zu behandeln.

Die Formänderung der Niveaulinie $u = c$ bei abnehmendem c, ihr Hinwegspringen über die Flächenstücke innerhalb L_1, L_2 .. L_ρ ist leicht zu übersehen; man kann etwa sagen, dass für $c = c_\alpha - 0$ und $c = c_\alpha + 0$ jedesmal nur der eine Teil von L_α zu $u = c$ gehört, und dass in diesen Fällen $u = c$ noch eine einfache geschlossene Linie ohne Knotenpunkte, aber mit Ecken[1]) in den beiden kritischen Punkten von L_α ist.

Diese geometrischen Beziehungen kann man übrigens z. T. direkt herleiten, ähnlich wie Riemann in art. 21 seiner Dissertation beim einfach-zusammenhängenden Gebiet verfuhr. Freilich ist dadurch nur ein geringer Teil der analytischen Betrachtungen zu ersparen.

Ich habe hier nur eine der allgemeinen Green'schen Funktionen herausgegriffen. Mit einer anderen, durchaus endlichen, steht die Abbildung von G auf einen Kreisring mit $\rho - 1$ concentrischen Kreisbogen-Schnitten im Zusammenhang. Eine dritte Funktion, mit zwei logarithmischen Punkten, liefert die Abbildung des Gebiets auf die unendliche Ebene, in der $\rho + 1$ solche Schnitte enthalten sind.

Nun lassen sich alle diese Ergebnisse auch herleiten bei nicht analytischen Randlinien, falls nur die Biegung, Krümmung und deren Differentialquotient in Bezug auf die Bogenlänge abteilungsweise stetig sind. Zum Beweis ist i. w. nur erforderlich, dass man an jedem kurzen Randstück σ ein kleines Gebiet T aus G abgrenzt, wie in § 8 des zweiten und §§ 3—5 des dritten Teils. T wird wieder auf ein Kreissegment T_1 abgebildet, wobei das gerade Stück σ_1 dem σ entspreche. Das Potential u überträgt

[1]) Eine Ecke würde nur dann nicht auftreten, wenn L_α in dem kritischen Punkt eine Spitze gegen das Innere von G hätte.

sich nach T_1 und ist über σ_1 hinaus analytisch fortsetzbar. Daraus lassen sich für v auf σ_1 und auf σ die nötigen Schlüsse ziehen. $F(z) = e^{u + iv}$ bewirkt eine (1,1)-deutige und stetige Abbildung von G auf die Kreisfläche mit den Schnitten. Konformität besteht für das ganze Gebiet bis auf die 2ρ kritischen Punkte und die Stellen, wo die Biegung oder die Krümmung einer Randlinie sich sprungweise ändert. Eine sprungweise Aenderung des Differentialquotienten der Krümmung allein stört nicht; bei einem Krümmungswechsel ohne Ecke besteht wenigstens noch Winkeltreue der Abbildung, bei einer Ecke erleiden alle Winkel durch die Abbildung Aenderungen in gemeinsamem Verhältnis, ganz wie in früheren Fällen. Endlich trifft der im Innern von G verlaufende Teil der ausgezeichneten Niveaulinie $u = c_\alpha$ den übrigen Teil derselben, nämlich L_α rechtwinklig, wenn der betreffende kritische Punkt keine Ecke von L_α ist, allgemein gesagt halbiert er immer den an der Stelle auftretenden Winkel.

Ich kann von näherer Begründung absehen, weil die früher entwickelten Hilfsmittel i. w. ausreichen und ich hier ohnedies nicht im einzelnen auf die Beweise der Schottky'schen Sätze eingehen kann.

§. 7. Die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels gibt auch im Raum Potentiale zu gegebenen Begrenzungswerten, und zwar sowohl für das Innere als das Aeussere einer konvexen oder teils ebenen Fläche. Die Oberflächenwerte sollen dabei stetig oder abteilungsweise stetig sein, die Fläche selbst soll in jedem Punkte i. a. eine einzige Tangentialebene haben, die sich beim Fortrücken dieses Punktes i. a. stetig dreht. Die Ausnahmen sind beschränkt auf einzelne (krummlinige) Kanten, die auch

zu mehreren in einen Punkt zusammenlaufen dürfen, und sonst noch auf einzelne konische Punkte.

Wie dies in § 4 des zweiten Teils für die Ebene erläutert ist, kann man ein Gebiet, das von einer konvexen und einer konkaven Fläche begrenzt ist, als gemeinsames Stück eines konvexen Raumteils und des Aussengebiets um eine konvexe Fläche betrachten; durch das besondere alternierende Verfahren erledigt sich die Frage nach den Potentialen mit gegebenen Oberflächenwerten in diesem konvex-konkaven Gebiet.

Dagegen würde das Verfahren von § 3 im 2. Teil sich nicht direkt auf den Raum übertragen lassen — weder in der Anwendung auf teils konkave, noch in der auf teils sattelförmig begrenzte Gebiete. Denn im Raum bleibt $\Delta u = o$ gar nicht erhalten bei Transformation mit reciproken Radien.[1])

Aus konvexen und den eben besprochenen konvex-konkaven Gebieten lassen sich allgemeinere Gebiete kombinieren, und durch das gewöhnliche alternierende Verfahren ergeben sich für die neuen Gebiete Potentiale zu gegebenen Oberflächenwerten. Aber diese Gebiete sind keineswegs allgemein in dem Sinn, wie man die ebenen Gebiete von § 5 im zweiten Teil allgemein nennen kann. Denn es handelt sich hier nur um konvexe oder konkave oder ebene Begrenzungsflächen, nicht um sattelförmige. In dieser Hinsicht gehen die beiden Methoden von Herrn

---

[1]) Man sieht das am kürzesten aus der Form der Differentialgleichung für Polarkoordinaten, wobei man das Transformationscentrum in den Pol legt, damit nur ein Glied zu transformieren ist. Ob die Thomson'sche Methode der sphärischen Bilder hier brauchbar ist, muss ich unentschieden lassen.

Poincaré wesentlich weiter als das eben besprochene Verfahren, im Gegensatz zum Fall der Ebene.[1])

Ich habe hier im Zusammenhang und mit ausführlicher Begründung die Untersuchungen dargelegt, von denen eine kurze Mitteilung in den Göttinger Nachrichten (1894) handelte. Naturgemäss findet sich in dieser Darstellung manches, was auch von anderen Seiten durchdacht und ausgesprochen wurde. Ich habe das, was mir darüber allmählich bekannt geworden ist, nicht einzeln hervorgehoben, ich habe nur betont, wo ich fremde Gedanken direkt verwende. Meine Studien knüpften zuerst an die Schwarz'schen Arbeiten an, erst später lernte ich die Neumann'schen näher kennen und fand auch darin wichtige Anregung.

Die Untersuchungen stammen bis auf einige Nebenbetrachtungen aus dem Herbst und Winter 1893. Ein Teil meiner Arbeiten aus jener Zeit ist aber weder in der kleinen Mitteilung noch hier wiedergegeben. Er betraf die Durchführung der von Herrn Schwarz nur in den Grundzügen angedeuteten Beweise für das Vorhandensein der Integrale 1.—3. Gattung in einer geschlossenen Riemann'schen Fläche. Ich konnte im Oktober Herrn Schwarz das Ergebnis und gegen Weihnachten 1893 die ausführliche Darstellung senden, wie auf Grundlage seiner Veröffentlichungen die ganzen Beweise vollständig durchführbar

---

[1]) Ich berichtige damit einen Fehler in der gleich zu nennenden vorläufigen Mitteilung, und will noch ein Versehen darin hervorheben: Die s. g. disjunktive Kombinationsmethode wird in dem Buch zwar nur für den Kreisring verwendet, aber doch allgemeiner entwickelt.

sind. Diese mehr als zwei Jahrzehnte wenig bekannte Thatsache wurde damals bald in dem betreffenden Heft des Picard'schen Traité d'Analyse ausgesprochen.[1]) Deshalb sah ich in der kurzen Göttinger Mitteilung von näheren Angaben hierüber ab und beschränkte mich auf die Frage nach der Tragweite der Schwarz'schen und Neumann'schen Methoden, soweit sie begrenzte Gebiete betreffen.

---

[1]) Meine Behandlung stimmt jedoch nicht überall mit der Picard'schen überein, sie schliesst sich z. T. enger an die Andeutungen des Herrn Schwarz an.